

TEORÍA DEL BUQUE



APUNTES

ASIGNATURA DE TEORÍA DEL BUQUE DE LA ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIEROS NAVALES Y OCEÁNICOS DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE
CARTAGENA (ETSINO - UPCT)

REALIZADOS POR EL PROFESOR INGENIERO NAVAL, D. OLAVO PALOMO LÓPEZ.

TEORÍA DEL BUQUE

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN APROXIMADA

INTRODUCCIÓN

En Construcción Naval en general, y sobre todo en Teoría del Buque, necesitamos continuamente el cálculo integral como una herramienta de trabajo. Sin embargo, el problema con el que casi siempre nos enfrentamos es la indefinición matemática o analítica de la superficie de trazado de la carena. En la cartilla de trazado únicamente se dan puntos aislados o discretos.

Por tanto, cuando no conozcamos la función analítica $y = f(x)$ de cualquier función integrando

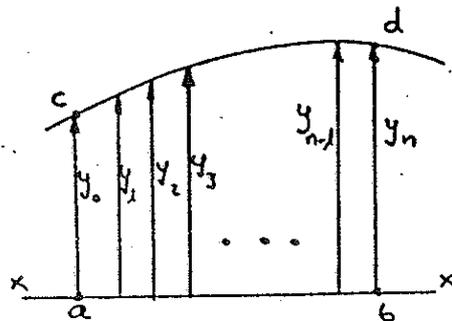
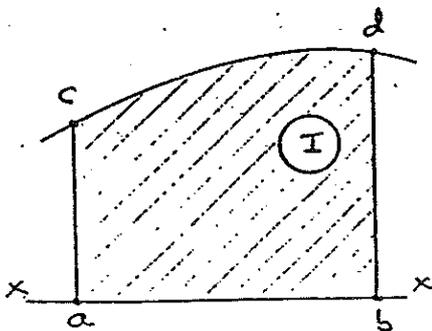
$$I = \int_a^b y \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

debemos acudir a otros métodos alternativos para calcular la integral.

Antiguamente se utilizaban unos dispositivos mecánicos que calculaban el área encerrada por una curva, que previamente se había dibujado a escala, incluso sobre papel milimetrado. Hoy en día, con el desarrollo de los ordenadores, se han impuesto claramente los métodos numéricos.

El planteamiento general de los métodos numéricos, o de integración aproximada, es el siguiente:

Si consideramos que una integral definida viene a ser el cálculo de un "área", nuestro problema lo podemos considerar como el cálculo del área encerrada entre los puntos 'c' y 'd' de una curva, y 'a' y 'b' de una recta,

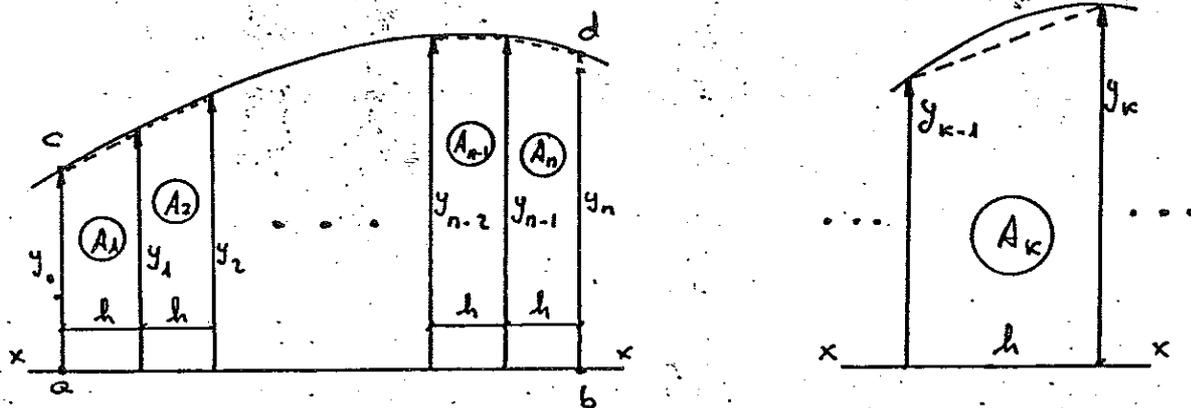


y para ello debemos partir de una serie de ordenadas $y_0, y_1, y_2, y_n, \dots, y_n$ conocidas.

REGLA DE LOS TRAPECIOS

Como su propio nombre indica, este procedimiento consiste en calcular el área entre las ordenadas consecutivas como si fuese un trapecio. Para ello dividimos el intervalo de integración $[a, b]$ en una serie de subintervalos, según el número de ordenadas de que dispongamos, siendo el área de un intervalo k , cualquiera,

$$A_k = \frac{(y_{k-1} + y_k)}{2} \cdot h$$



y la integral $I \approx A_1 + A_2 + \dots + A_n$

Aunque obviamente no es imprescindible, para facilitar los cálculos lo habitual es que el intervalo h entre ordenadas sea uniforme para todas ellas.

Así nos queda:

$$A_1 = \frac{(y_0 + y_1)}{2} \cdot h$$

$$A_2 = \frac{(y_1 + y_2)}{2} \cdot h$$

$$A_n = \frac{(y_{n-1} + y_n)}{2} \cdot h$$

→ Agrupando $I \approx A_1 + A_2 + \dots + A_n \rightarrow$

$$I = h \left[\frac{(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \dots + (y_{n-2} + y_{n-1}) + (y_{n-1} + y_n)}{2} \right]$$

$$I \approx h \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right]$$

Este método, por tanto, se basa en aproximar el arco de la curva de cada subintervalo a su cuerda, es decir, el área de cada trapecio curvilíneo al rectilíneo, con lo que en lugar de la curva estamos considerando una línea quebrada o polilínea.

El error que cometemos con este procedimiento será tanto menor cuanto menor sea el intervalo entre ordenadas que estamos considerando.

APROXIMACIÓN PARABÓLICA

Este método es la base de todos los métodos de integración aproximada que vamos a comentar, incluido el de los trapecios. Consiste en aproximar la curva o función a una parábola o polinómica,

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

siendo el orden o grado de la parábola el máximo exponente n que estamos considerando, y que podrá ser par o impar.

En principio, para poder calcular la integral $\int_a^b y dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n a_i x^i dx$ necesitamos conocer los $n+1$ coeficientes a_i . Para ello debemos tomar tantos puntos distintos de la curva $P_j(x_j; y_j)$ como coeficientes estamos considerando

$$\boxed{\text{núm. de ordenadas} = \text{núm. de coeficientes} = \text{orden} + 1}$$

Al sustituir los valores $(x_j; y_j)$ en la función $y = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ nos quedará un sistema de ecuaciones a resolver.

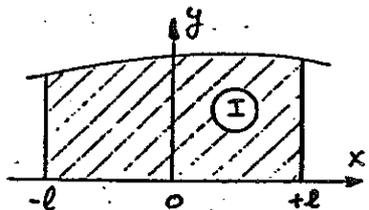
$$\left. \begin{array}{l} P_0(x_0; y_0) \rightarrow y_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n \\ P_1(x_1; y_1) \rightarrow y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n \\ \vdots \\ P_n(x_n; y_n) \rightarrow y_n = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n \end{array} \right\} \Rightarrow a_0, a_1, \dots, a_n$$

Una vez conocidos los coeficientes a_i ya podemos determinar el valor de la integral.

Ahora bien, para simplificar la expresión de la integral y por las ventajas que representa, en todo este estudio vamos a tomar el origen en el punto medio del intervalo de integración

$$[a; b] \rightarrow [-l; +l]$$

lo cual nunca afectará el valor numérico final de cualquier integral definida



$$I = \int_{-l}^{+l} y \, dx$$

- Orden par ($2n$)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i$$

$$I = \int_{-l}^{+l} y \, dx = \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_{2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-l}^{+l} \rightarrow$$

$$I = 2 \left[a_0 l + a_2 \frac{l^3}{3} + \dots + a_{2n} \frac{l^{2n+1}}{2n+1} \right] \quad (1)$$

Como vemos, en esta expresión no aparecen los coeficientes impares ($a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$) pues, al haber tomado el origen en el punto medio del intervalo de integración, las potencias de orden par (x^2, x^4 , etc.) se autoanulan.

- Orden impar ($2n+1$)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i$$

$$I = \int_{-l}^{+l} y \, dx = \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_{2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + a_{2n+1} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_{-l}^{+l} \rightarrow$$

$$I = 2 \left[a_0 l + a_2 \frac{l^3}{3} + \dots + a_{2n} \frac{l^{2n+1}}{2n+1} \right] \quad (1)$$

que coincide con la expresión (1), pues el término $a_{2n+1} \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_{-l}^{+l}$, al ser x^{2n+2} también por se autoanula.

- Conclusiones

- Desde el punto de vista del desarrollo, da lo mismo tomar la parábola de orden par ($2n$) que el siguiente orden impar ($2n+1$). Sin embargo, como es obvio, cuanto mayor sea el grado de la parábola menor será el error cometido en la aproximación de la integral.
- A la hora de resolver el sistema de ecuaciones anterior para determinar los $2n+1$ coeficientes que tiene la polinómica, si es par, o $2n+2$ si es impar, no es necesario conocerlos todos, pues sólo intervienen los pares.

Este método tiene dos inconvenientes principales:

- Por un lado, una vez fijado el orden de la parábola, hay que resolver un sistema de ecuaciones previo a cada integral, lo cual resulta bastante engorroso, pues los coeficientes a_i serán distintos para cada curva particular.
- Por otro lado, los puntos $P_i(x_i, y_i)$ para determinar los coeficientes a_i , teóricamente podrían estar en cualquier parte del intervalo $[-l, +l]$. Obviamente, si concentramos todos los puntos en una pequeña zona, dejando al resto sin representación, los resultados pueden ser bastante engañosos.

APROXIMACIÓN PARABÓLICA CON MULTIPLICADORES

Condiciones generales

En este caso, partiendo de la aproximación parabólica anterior, pretendemos:

- Que, en lugar de determinar en cada caso los distintos coeficientes a_i con un sistema de ecuaciones, podamos obtener el valor de la integral mediante la expresión

$$I = \sum_{i=1}^N p_i \cdot y_i \quad (2)$$

es decir, multiplicando cada ordenada y_i por unos coeficientes p_i , que vamos a llamar multiplicadores, y después sumar todos los productos.

- Pero, además, que una vez fijado el orden de la parábola, en 0 o $2n+1$, los multiplicadores sean siempre los mismos, sea cual sea la curva. O dicho de otra manera, que los multiplicadores sólo dependan del número de ordenadas que estemos considerando, y no de sus coeficientes a_i .

1. MÉTODO DE NEWTON-COTES

Condiciones particulares (*)

- Las N ordenadas que consideremos en cada caso estarán espaciadas entre sí una distancia uniforme h a lo largo del intervalo de integración.
- La primera y la última de estas ordenadas coincidirán, respectivamente, en los extremos del intervalo de integración.

En este método, por tanto, el objetivo consiste en obtener los N multiplicadores p_i correspondientes a cada ordenada y_i , para ello se identifica la expresión (2) con la (1)

$$\sum_{i=1}^N p_i \cdot y_i = 2 \left[a_0 l + a_2 \frac{l^3}{3} + \dots + a_{2n} \frac{l^{2n+1}}{2n+1} \right]$$

(*) En algunas publicaciones, tanto las condiciones particulares, como el procedimiento del desarrollo para llegar a las conclusiones puede ser distinto.

obligando a que cada ordenada y_i , en la posición x_i , cumpla la ecuación de la parábola

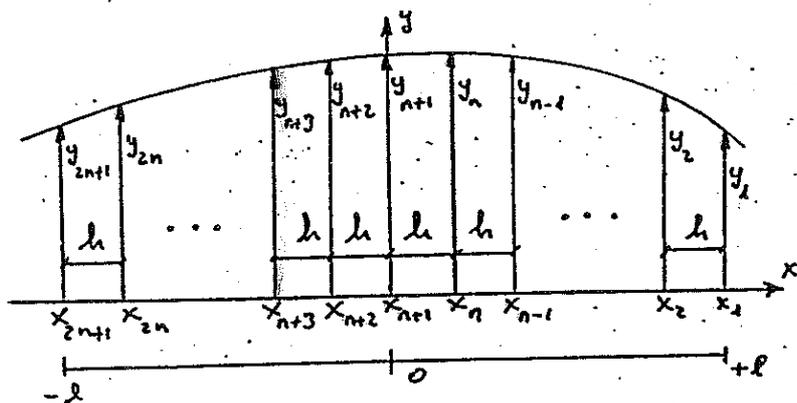
$$y_i = \sum a_j x_i^j$$

En principio, para obtener la solución, el número de coeficientes debería coincidir con el número de ordenadas, o lo que es lo mismo, con el número de multiplicadores incógnita.

$$\text{núm. de ordenadas } (N) = \text{núm. de coeficientes} = \text{orden de la parábola} + 1$$

No obstante, como ya vimos, al tomar el origen en el punto medio del intervalo de integración, si el grado de la parábola resultante es par podemos tomar el siguiente orden impar, sin que varíen las conclusiones.

- Número de ordenadas impar ($N = 2n + 1$)



$$I = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_{2n+1} y_{2n+1}$$

En este caso, si $N = 2n + 1$ le corresponderá una parábola de orden $N - 1 = 2n$. Es decir, par. No obstante, según venimos comentando, con la expresión (1), en este caso también podría ser de orden $2n + 1$. Téngase en cuenta que cuanto mayor sea el grado del polinomio de ajuste, menor será el error cometido en la aproximación de la integral.

Como no afecta, para nuestro desarrollo vamos a considerar la parábola de orden $2n$

De (2) $I = \sum_{i=1}^{2n+1} P_i y_i$, sustituyendo cada ordenada por la polinómica $y_i = \sum_{j=0}^{2n} a_j x_i^j$ nos queda:

$$\begin{aligned}
 I &= P_1 [a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \dots + a_{2n} x_1^{2n}] + \\
 &+ P_2 [a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \dots + a_{2n} x_2^{2n}] + \\
 &+ P_3 [a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \dots + a_{2n} x_3^{2n}] + \\
 &\vdots \\
 &+ P_{2n+1} [a_0 + a_1 x_{2n+1} + a_2 x_{2n+1}^2 + \dots + a_{2n} x_{2n+1}^{2n}]
 \end{aligned}$$

Sacando factor común cada coeficiente

$$\begin{aligned}
 I &= a_0 [P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{2n+1}] + \\
 &+ a_1 [x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + \dots + x_{2n+1} P_{2n+1}] + \\
 &+ a_2 [x_1^2 P_1 + x_2^2 P_2 + x_3^2 P_3 + \dots + x_{2n+1}^2 P_{2n+1}] + \\
 &\vdots \\
 &+ a_{2n} [x_1^{2n} P_1 + x_2^{2n} P_2 + x_3^{2n} P_3 + \dots + x_{2n+1}^{2n} P_{2n+1}]
 \end{aligned}$$

Para que esta expresión sea siempre idéntica a la (1)

$$I = \int_{-l}^{+l} y dx = z \left[a_0 l + a_2 \frac{l^3}{3} + \dots + a_{2n} \frac{l^{2n+1}}{2n+1} \right] \quad (1)$$

cualquiera que sea la curva, o lo que es lo mismo, con independencia de los coeficientes a_i , los términos que multiplican a cada uno de ellos deben ser siempre iguales en ambas expresiones (2) y (1).

Identificando coeficientes

$$a_0 \rightarrow P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{2n+1} = z l$$

$$a_1 \rightarrow x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + \dots + x_{2n+1} P_{2n+1} = 0 \quad (\text{y todos los coeficientes impares})$$

$$a_2 \rightarrow x_1^2 P_1 + x_2^2 P_2 + x_3^2 P_3 + \dots + x_{2n+1}^2 P_{2n+1} = \frac{z}{3} l^3$$

$$a_{2n} \rightarrow x_1^{2n} P_1 + x_2^{2n} P_2 + \dots + x_{2n+1}^{2n} P_{2n+1} = \frac{z}{2n+1} l^{2n+1}$$

Conclusiones:

- Por haber tomado el origen en el punto medio del intervalo de integración y la distancia entre ordenadas h uniforme, con la primera y la última

en los extremos, se tiene que cumplir la condición de simetría de las abscisas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -x_{2n+1} = l \\ x_2 &= -x_{2n} \\ &\vdots \\ x_n &= -x_{n+2} \\ x_{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

A su vez, cada x_i y l serán un múltiplo natural de h

- Utilizando la condición de simetría de las abscisas en la ecuación correspondiente al coeficiente a_1 (o en cualquiera de las ecuaciones correspondientes a los coeficientes impares) nos queda:

$$x_1(p_1 - p_{2n+1}) + x_2(p_2 - p_{2n}) + \dots + x_n(p_n - p_{n+2}) = 0$$

Pero $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, según las hemos tomado, son todas cantidades positivas. Por tanto, si queremos que esta ecuación sea siempre igual a cero, todos y cada uno de los términos entre paréntesis han de ser, a su vez, iguales a cero, con lo que nos queda la condición de simetría de los multiplicadores

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_{2n+1} \\ p_2 &= p_{2n} \\ p_3 &= p_{2n-1} \\ &\vdots \\ p_n &= p_{n+2} \\ p_{n+1} & \end{aligned} \right\}$$

A efectos prácticos, esta condición nos va a permitir numerar las ordenadas de derecha a izquierda, o de izquierda a derecha, indistintamente.

- Utilizando estas dos condiciones de simetría en el resto de las ecuaciones correspondientes a los coeficientes pares, y simplificando el 2, nos queda el sistema:

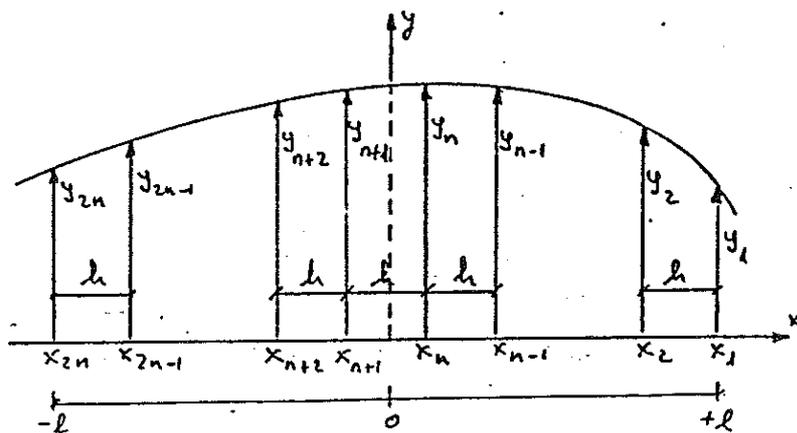
$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &\rightarrow 2 \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + \frac{1}{2} p_{n+1}) = 2l \\
 a_2 &\rightarrow p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \dots + p_n x_n^2 = \frac{l^3}{3} \\
 a_4 &\rightarrow p_1 x_1^4 + p_2 x_2^4 + p_3 x_3^4 + \dots + p_n x_n^4 = \frac{l^5}{5} \\
 &\vdots \\
 a_{2n} &\rightarrow p_1 x_1^{2n} + p_2 x_2^{2n} + p_3 x_3^{2n} + \dots + p_n x_n^{2n} = \frac{l^{2n+1}}{2n+1}
 \end{aligned} \right\} (I)$$

Ahora para resolver este sistema de ecuaciones lineales en p_i , que era nuestro objetivo, sólo hay que poner las x_i y l en función de h , y así obtendríamos $p_i = f_i \cdot h$, siendo f_i un coeficiente a determinar.

Observaciones:

- Ni en el sistema de ecuaciones (I), ni en la ecuación para obtener la simetría de los multiplicadores, aparecen los términos $p_{n+1} x_{n+1}^{\alpha}$ ya que $x_{n+1} = 0$ por ser el origen.
- Si en vez de utilizar una parábola de orden $2n$ hubiésemos utilizado la del orden impar superior $2n+1$, el desarrollo sería similar y las conclusiones no cambiarían ya que el coeficiente a_{2n+1} es impar.

- Número de ordenadas por ($N = 2n$)



$$I = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_{2n} y_{2n}$$

Como en el caso anterior, el número de incógnitas p_i coincide con el número de ordenadas que se toman considerando, por lo que se necesitará un número de ecuaciones (coeficientes) igual.

núm. de ordenadas ($N=2n$) = núm. de coeficientes = orden de la parábola + 1
 con lo que el grado de la polinómica será $2n-1$, que es impar.

$$y = \sum_{i=0}^{2n-1} a_i x^i$$

Los pasos matemáticos y las consideraciones a tener en cuenta son exactamente los mismos que en el caso anterior (número de ordenadas impar), por lo que no los repetimos. Así las conclusiones a las que se llega son:

- Por haber tomado el origen en el punto medio del intervalo de integración, con la primera y la última ordenada en cada extremo, la condición de simetría de las abscisas nos queda:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = -x_{2n} = l \\ x_2 = -x_{2n-1} \\ \vdots \\ x_{n-1} = -x_{n+2} \\ x_n = -x_{n+1} \end{array} \right\} \text{ con } x_i = n_i \cdot x \cdot h$$

- Al aplicar la condición de simetría de las abscisas en la ecuación correspondiente al coeficiente a_1 (o en cualquiera de los impares) se obtiene la condición de simetría de los multiplicadores:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = p_{2n} \\ p_2 = p_{2n-1} \\ \vdots \\ p_n = p_{n+1} \end{array} \right\}$$

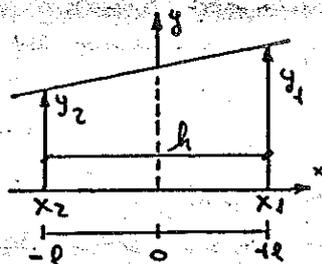
- Al sustituir ambas condiciones de simetría en las ecuaciones correspondientes al resto de los coeficientes pares, y simplificando, nos queda el sistema de ecuaciones final

$$\left. \begin{array}{l} a_0 \rightarrow p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = l \\ a_2 \rightarrow p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \dots + p_n x_n^2 = \frac{l^3}{3} \\ a_4 \rightarrow p_1 x_1^4 + p_2 x_2^4 + p_3 x_3^4 + \dots + p_n x_n^4 = \frac{l^5}{5} \\ \vdots \\ a_{2n-2} \rightarrow p_1 x_1^{2n-2} + p_2 x_2^{2n-2} + p_3 x_3^{2n-2} + \dots + p_n x_n^{2n-2} = \frac{l^{2n-1}}{2n-1} \end{array} \right\} \text{ (II)}$$

donde al poner las x_i y l en función de h nos permite obtener, finalmente, las soluciones $p_i = f_i \cdot h$ que buscamos.

Casos prácticos

- 2 ordenadas



- Número de ordenadas $N=2$, par, le corresponde una parábola de orden $N-1=2-1=1$, es decir, una recta

- $I = p_1 y_1 + p_2 y_2$

- Simetría de las abscisas: $x_1 = \frac{l}{2} = l = -x_2$

- Simetría de los multiplicadores: $p_1 = p_2$

- Sistema de ecuaciones (II): Se nos reduce a una ecuación

$$a_0 \rightarrow p_1 = l = \frac{l}{2} (= p_2)$$

Sustituyendo

$$I = p_1 y_1 + p_2 y_2 = \frac{l}{2} y_1 + \frac{l}{2} y_2 \rightarrow \boxed{I = \frac{l}{2} (y_1 + y_2)}$$

que es la regla del trapecio.

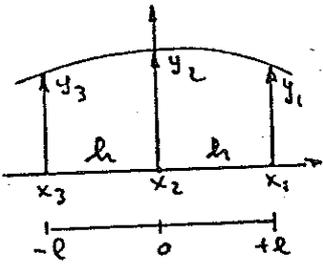
Si tomamos varios intervalos de integración consecutivos, el ser un proceso acumulativo

$$I = \sum I_i$$

y si además el intervalo h entre ordenadas es el mismo para todos nos queda la regla de los trapecios ya vista

$$\boxed{I = h \left[\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \dots + y_{N-1} + \frac{y_N}{2} \right]}$$

- Tres ordenadas. (Primera regla de Simpson)



• Número de ordenadas $N=3$, impar, le corresponde una parábola de grado 2 ó 3.

• $I = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$

• Simetría de las abscisas: $x_1 = h = l = -x_3$; $x_2 = 0$

• Sistema de ecuaciones (I):

$$\left. \begin{aligned} a_0 \rightarrow P_1 + \frac{1}{2} P_2 &= l \\ a_2 \rightarrow P_1 x_1^2 &= \frac{l^3}{3} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} P_1 + \frac{1}{2} P_2 &= h \\ P_1 h^2 &= \frac{1}{3} h^3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{h}{3} (= P_3) \\ P_2 &= \frac{4}{3} h \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo

$$I = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 \rightarrow I = \frac{h}{3} y_1 + \frac{4}{3} h y_2 + \frac{h}{3} y_3$$

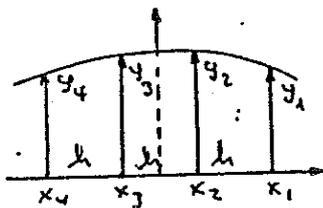
Sacando h factor común

$$I = \frac{h}{3} [1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3]$$

que es lo que se conoce como primera regla de Simpson, y a los coeficientes $\{1; 4; 1\}$ se les llama factores de Simpson (FS).

Si se hace agrupación de intervalos $I = \sum I_i = \frac{h}{3} \sum F_i y_i$

- Cuatro ordenadas. (Segunda regla de Simpson)



• Número de ordenadas $N=4$, par, le corresponde una parábola de grado 3

• $I = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4$

• Simetría de las abscisas: $x_1 = -x_4 = \frac{3}{2} h = l$; $x_2 = -x_3 = \frac{1}{2} h$

• Simetría de los multiplicadores: $P_1 = P_4$; $P_2 = P_3$

• Sistema de ecuaciones (II):

$$\left. \begin{aligned} a_0 \rightarrow P_1 + P_2 &= l \\ a_2 \rightarrow P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 &= \frac{l^3}{3} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} P_1 + P_2 &= \frac{3}{2} h \\ P_1 \left(\frac{3h}{2}\right)^2 + P_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 &= \frac{1}{3} \left(\frac{3h}{2}\right)^3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} P_1 + P_2 &= \frac{3}{2} h \\ \frac{9}{4} P_1 + \frac{1}{4} P_2 &= \frac{27}{24} h \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 + P_2 &= \frac{3}{2}h \\ 9P_1 + P_2 &= \frac{9}{2}h \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{3}{8}h \quad (=P_4) \\ P_2 &= \frac{9}{8}h \quad (=P_3) \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo

$$I = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 \rightarrow I = \frac{3}{8}h y_1 + \frac{9}{8}h y_2 + \frac{9}{8}h y_3 + \frac{3}{8}h y_4$$

Sacando factor común

$$I = \frac{3}{8}h [1y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 1y_4]$$

que es lo que se conoce como segunda regla de Simpson, siendo ahora los factores de Simpson (FS) $\{1; 3; 3; 1\}$

Si se hace una agrupación de intervalos con esta segunda regla tendríamos

$$I = \sum I_i = \frac{3}{8}h \sum FS_j y_j$$

- Más ordenadas

En la tabla A se dan los multiplicadores (hasta 10 ordenadas) en función del número de ordenadas que estemos considerando. Estos multiplicadores vienen como una fracción del intervalo entre ordenadas h , es decir, $P_i = f_i \cdot h$, y se pueden obtener simplemente resolviendo los sistemas lineales (I) o (II) haciendo $h=1$.

En la tabla B se da la expresión de la integral de una manera más simplificada.

TABLA A

Método de Newton - Cotes

Número total de ordenadas (N)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$							
4	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$						
5	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$					
6	$\frac{95}{288}$	$\frac{125}{96}$	$\frac{125}{144}$	$\frac{125}{144}$	$\frac{125}{96}$	$\frac{95}{288}$				
7	$\frac{41}{140}$	$\frac{54}{35}$	$\frac{27}{140}$	$\frac{68}{35}$	$\frac{27}{140}$	$\frac{54}{35}$	$\frac{41}{140}$			
8	$\frac{5257}{17280}$	$\frac{25039}{17280}$	$\frac{343}{640}$	$\frac{20923}{17280}$	$\frac{20923}{17280}$	$\frac{343}{640}$	$\frac{25039}{17280}$	$\frac{5257}{17280}$		
9	$\frac{3956}{14175}$	$\frac{23552}{14175}$	$\frac{3712}{14175}$	$\frac{41984}{14175}$	$\frac{3632}{2835}$	$\frac{41984}{14175}$	$\frac{3712}{14175}$	$\frac{23552}{14175}$	$\frac{3956}{14175}$	
10	$\frac{25713}{89600}$	$\frac{141669}{89600}$	$\frac{243}{2240}$	$\frac{10881}{5600}$	$\frac{26001}{44800}$	$\frac{26001}{44800}$	$\frac{10881}{5600}$	$\frac{243}{2240}$	$\frac{141669}{89600}$	$\frac{25713}{89600}$

$$I = \int y \times dx \approx h \sum_{i=1}^N f_i \times y_i$$

h = espaciado uniforme entre ordenadas, con la primera y la última coincidiendo en los extremos del intervalo de integración.

TABLA B

Método de Newton - Cotes

Número total de ordenadas (N)	Integral aproximada
2	$I = \frac{h}{2}(y_1 + y_2)$ (Regla del trapecio)
3	$I = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$ (Primera regla de Simpson)
4	$I = \frac{3h}{8}(y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4)$ (Segunda regla de Simpson)
5	$I = \frac{2h}{45}(7y_1 + 32y_2 + 12y_3 + 32y_4 + 7y_5)$
6	$I = \frac{5h}{288}(19y_1 + 75y_2 + 50y_3 + 50y_4 + 75y_5 + 19y_6)$
7	$I = \frac{h}{140}(41y_1 + 216y_2 + 27y_3 + 272y_4 + 27y_5 + 216y_6 + 41y_7)$
8	$I = \frac{7h}{17280}(751y_1 + 3577y_2 + 1323y_3 + 2989y_4 + 2989y_5 + 1323y_6 + 3577y_7 + 751y_8)$
9	$I = \frac{4h}{14175}(989y_1 + 5888y_2 - 928y_3 + 10496y_4 - 4540y_5 + 10496y_6 - 928y_7 + 5888y_8 + 989y_9)$
10	$I = \frac{9h}{89600}(2857y_1 + 15741y_2 + 1080y_3 + 19344y_4 + 5778y_5 + 5778y_6 + 19344y_7 + 1080y_8 + 15741y_9 + 2857y_{10})$

2. MÉTODO DE TCHEBYCHEFF O TCHEBYCHEFT

Este método no es más que una variante del método de aproximación parabólica con multiplicadores

$$(2) \quad \sum_{i=1}^N p_i \cdot y_i \quad \text{con} \quad y = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$$

con la condición particular de que el multiplicador es común para todas las ordenadas

$$p_i = p \rightarrow I = \sum_{i=1}^N p \cdot y_i \rightarrow \boxed{I = p \cdot \sum_{i=1}^N y_i} \quad (3)$$

El objetivo, por tanto, ahora consiste en conocer p y las posiciones x_i de las distintas ordenadas y_i , es decir, tendremos $N+1$ incógnitas (N posiciones x_i , más p). Para ello necesitaremos definir $N+1$ ecuaciones, y por tanto coeficientes, por lo que la parábola debería ser de grado N .

Como no afecta al valor numérico final de la integral, y por las ventajas que tiene, seguimos considerando el origen en el punto medio del intervalo de integración $]-l; +l[$

- Número de ordenadas par ($N=2n$)

Aproximemos la curva o función a una parábola de orden $N=2n$

$$I = \int_{-l}^{+l} y \, dx = 2 \left[a_0 l + \frac{1}{3} a_2 l^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} a_{2n} l^{2n+1} \right] \quad (A)$$

No obstante, al ser $2n$ par, también podríamos haber considerado la parábola de orden $2n+1$ sin que se alteren los resultados finales.

De (3) $I = p \sum_{i=1}^{2n} y_i$ con $y_i = \sum_{j=0}^{2n} a_j \cdot x_i^j$ Sustituyendo

$$\left. \begin{aligned} I &= p (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_{2n} x_1^{2n}) + \\ &+ p (a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_{2n} x_2^{2n}) + \\ &\quad \vdots \\ &+ p (a_0 + a_1 x_{2n} + a_2 x_{2n}^2 + \dots + a_{2n} x_{2n}^{2n}) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= a_0 z^{n\phi} + \\
 &+ a_1 \rho (x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}) + \\
 &+ a_2 \rho (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n}^2) + \\
 &\vdots \\
 &+ a_{2n} \rho (x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n})
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\Gamma} \right\}$$

Igualando con (1) e identificando coeficientes

$$a_0 \rightarrow z^{n\phi} = z^l \rightarrow \phi = \frac{z^l}{z^n} \rightarrow \boxed{\phi = \frac{z^l}{N} = \frac{l}{n}}$$

$a_1 \rightarrow \rho(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}) = 0$ Para que se cumpla siempre esta ecuación se tiene que dar la condición de simetría de las abscisas.

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 &= -x_{2n} \\
 x_2 &= -x_{2n-1} \\
 &\vdots \\
 x_n &= -x_{n+1}
 \end{aligned} \right\}$$

A esta misma conclusión habríamos llegado con cualquiera de las ecuaciones correspondientes a los coeficientes impares, incluyendo un posible coeficiente a_{2n+1} si hubiéramos tomado la parábola de ese orden.

Resto de los coeficientes pares:

$$\left. \begin{aligned}
 a_2 \rightarrow \rho(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n}^2) &= \frac{2l^3}{3} \\
 a_4 \rightarrow \rho(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{2n}^4) &= \frac{2l^5}{5} \\
 &\vdots \\
 a_{2n} \rightarrow \rho(x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n}) &= \frac{2}{2n+1} l^{2n+1}
 \end{aligned} \right\}$$

Y para este sistema de ecuaciones le aplicamos la condición de simetría de las abscisas, nos queda:

$$\left. \begin{aligned} 2\varphi(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) &= \frac{2l^3}{3} \\ 2\varphi(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4) &= \frac{2l^5}{5} \\ &\vdots \\ 2\varphi(x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_n^{2n}) &= \frac{2}{2n+1} l^{2n+1} \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

Poniendo ahora $\varphi = \frac{l}{n}$ podemos resolver este sistema de ecuaciones, no lineal, y obtener la mitad de los valores x_i en función de la semilongitud del intervalo de integración l . La otra mitad se obtendría aplicando la condición de simetría de las abscisas.

Si este mismo sistema lo expresamos en función del número total de ordenadas N , haciendo $\varphi = \frac{2l}{N}$ tenemos

$$\left. \begin{aligned} a_2 \rightarrow \frac{2l}{N} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N/2}^2) &= \frac{l^3}{3} \\ a_4 \rightarrow \frac{2l}{N} (x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{N/2}^4) &= \frac{l^5}{5} \\ &\vdots \\ a_{2n} \rightarrow \frac{2l}{N} (x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_{N/2}^{2n}) &= \frac{l^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N/2}^2 &= \frac{Nl^2}{6} \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{N/2}^4 &= \frac{Nl^4}{10} \\ &\vdots \\ x_1^{N-2} + \dots + x_{N/2}^{N-2} &= \frac{N}{2(N-1)} l^{N-2} \\ x_1^N + \dots + x_{N/2}^N &= \frac{N^2}{2(N+1)} l^N \end{aligned} \right\} \text{(III - 1)}$$

- Número de ordenadas impar ($N=2n+1$)

En principio, la parábola de aproximación de serie ser de orden $N=2n+1$, que es impar, sin embargo, al tomar el origen en el punto medio del intervalo, también podemos considerar la parábola de orden n , que es lo que vamos a hacer.

$$I = p \sum_{i=1}^{2n+1} y_i$$

$$\text{con } y_i = \sum_{j=0}^{2n} a_j x_i^j$$

$$I = p(a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{2n} x_1^{2n}) + \dots + p(a_0 + a_1 x_{2n+1} + \dots + a_{2n} x_{2n+1}^{2n}) \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} I &= a_0 p(2n+1) + \\ &+ a_1 p(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}) + \\ &+ a_2 p(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n+1}^2) + \\ &\vdots \\ &+ a_{2n} p(x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_{2n+1}^{2n}) \end{aligned} \right\}$$

Iguando con (1) e identificando coeficientes:

$$a_0 \rightarrow p(2n+1) = 2l \rightarrow$$

$$p = \frac{2l}{2n+1} = \frac{2l}{N}$$

$$a_1 \rightarrow p(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}) = 0 \Rightarrow$$

Condición de simetría de las abricas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -x_{2n+1} \\ x_2 &= -x_{2n} \\ &\vdots \\ x_n &= -x_{n+2} \\ x_{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Resto de los coeficientes pares

$$a_2 \rightarrow p(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n+1}^2) = \frac{2l^3}{3}$$

$$a_4 \rightarrow p(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{2n+1}^4) = \frac{2l^5}{5}$$

$$a_{2n} \rightarrow p(x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_{2n+1}^{2n}) = \frac{2}{2n+1} l^{2n+1}$$

Aplicando la condición de simetría de las abricas, y teniendo en cuenta que $x_{n+1} = 0$, el sistema se nos reduce a

$$\left. \begin{aligned} 2p(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) &= \frac{2l^3}{3} \\ 2p(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4) &= \frac{2l^5}{5} \\ &\vdots \\ 2p(x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_n^{2n}) &= \frac{2}{2n+1} l^{2n+1} \end{aligned} \right\} \text{(IV)}$$

de donde, haciendo $p = \frac{2l}{2n+1}$, podemos obtener las x_i , junto con la condición de simetría, en función de la longitud del semi-intervalo l .

Si este mismo sistema lo queremos expresar en función del número total de ordenadas N , con $p = \frac{2l}{N}$, nos quedaría:

$$\left. \begin{aligned} a_2 \rightarrow \frac{2l}{N} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{\frac{N-1}{2}}^2) &= \frac{l^3}{3} \\ a_4 \rightarrow \frac{2l}{N} (x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{\frac{N-1}{2}}^4) &= \frac{l^5}{5} \\ &\vdots \\ a_{2n} \rightarrow \frac{2l}{N} (x_1^{N-1} + x_2^{N-1} + \dots + x_{\frac{N-1}{2}}^{N-1}) &= \frac{l^N}{N} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{\frac{N-1}{2}}^2 = \frac{Nl^2}{6}$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{\frac{N-1}{2}}^4 = \frac{Nl^4}{10}$$

$$\vdots$$

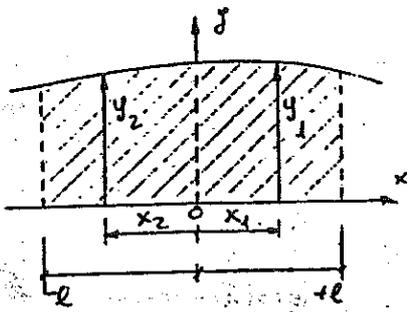
$$x_1^{N-3} + x_2^{N-3} + \dots + x_{\frac{N-1}{2}}^{N-3} = \frac{Nl^{N-2}}{2(N-2)}$$

$$x_1^{N-1} + x_2^{N-1} + \dots + x_{\frac{N-1}{2}}^{N-1} = \frac{Nl^N}{2N}$$

(IV-1)

Casos prácticos

- Dos ordenadas



- $N=2$ (par). Le correspondería una parábola de segundo o de tercer orden.

$$N=2=2n \Rightarrow n=1$$

Particularizando en las condiciones generales:

$$p = \frac{2l}{N} = \frac{l}{n} \rightarrow p = \frac{2l}{2} = \frac{l}{1} \Rightarrow \boxed{p=l} \quad (*)$$

- Simetría de las abscisas: $x_1 = -x_2$
- Sistema de ecuaciones (III): Se nos reduce a una ecuación

$$px_1^2 = \frac{l^3}{3} \rightarrow lx_1^2 = \frac{l^3}{3} \rightarrow x_1^2 = \frac{l^2}{3} \rightarrow x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

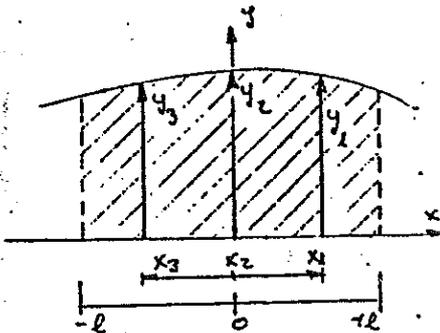
Por tanto:

$$\boxed{x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad ; \quad x_2 = -\frac{l}{\sqrt{3}}}$$

- Expresión de la integral aproximada:

$$I = p \sum y_i \rightarrow \boxed{I = l(y_1 + y_2)}$$

- Tres ordenadas



- $N=3$ (impar). Le corresponde también una parábola de segundo o de tercer orden.

$$N=3=2n+1 \Rightarrow n=1$$

Particularizando en las condiciones generales:

$$p = \frac{2l}{N} = \frac{2l}{2n+1} = \frac{2l}{3} \Rightarrow \boxed{p = \frac{2}{3}l}$$

(*) Sepamos recordando que l es la mitad de la longitud del intervalo de integración, y que todas las abscisas x_i están referidas al punto medio del intervalo $]-l; +l[$ (no al origen que consideremos en una aplicación concreta).

- Simetría de las abscisas: $x_1 = -x_3$; $x_2 = 0$
- Sistema de ecuaciones (IV): Se nos reduce también a una ecuación

$$P x_1^2 = \frac{l^3}{3} \rightarrow \frac{2}{3} l x_1^2 = \frac{l^3}{3} \rightarrow x_1 = \frac{l}{\sqrt{2}} \quad \text{es decir,}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{l}{\sqrt{2}} \quad ; \quad x_2 = 0 \quad ; \quad x_3 = -\frac{l}{\sqrt{2}}}$$

medidos, como siempre, desde el punto medio del intervalo de integración.

- Expresión de la integral aproximada:

$$I = p \sum y_i \rightarrow \boxed{I = \frac{2}{3} l (y_1 + y_2 + y_3)}$$

- Cuatro ordenadas

- $N=4$ (par) Le corresponde una parábola de cuarto o quinto orden.

$$N = 2n = 4 \rightarrow n = 2$$

$$p = \frac{2l}{N} = \frac{2l}{4} \rightarrow \boxed{p = \frac{l}{2}}$$

- Simetría de las abscisas: $x_1 = -x_4$; $x_2 = -x_3$

- Sistema de ecuaciones (III-1):

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \frac{Nl^2}{6} = \frac{4l^2}{6} = \frac{2l^2}{3} \\ x_1^4 + x_2^4 &= \frac{Nl^4}{10} = \frac{4l^4}{10} = \frac{2l^4}{5} \end{aligned} \right\}$$

Eliminando x_2 entre ellas se obtiene $x_1^4 - \frac{2}{3} l^2 x_1^2 + \frac{1}{45} l^4 = 0$, que es una ecuación bicuadrada muy fácil de resolver.

Por la simetría del sistema de ecuaciones, los valores de x_1 y x_2 , y por tanto los de x_3 y x_4 , serán las raíces de esta ecuación:

$$\boxed{x = \pm l \sqrt{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{45}}}}$$

es decir,

$$\boxed{x_1 = 0,794654 \cdot l \quad ; \quad x_2 = 0,187592 \cdot l \quad ; \quad x_3 = -0,187592 \cdot l \quad ; \quad x_4 = -0,794654 \cdot l}$$

• Integral:

$$I = p \sum y_i \rightarrow \boxed{I = \frac{l}{2} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}$$

- Cinco ordenadas

• $N=5$ (impar). Le corresponde una parábola de orden cuatro o cinco.

$$N = 2n + 1 = 5 \Rightarrow n = 2$$

$$\cdot p = \frac{2l}{N} = \frac{2l}{5} \rightarrow \boxed{p = \frac{2l}{5}}$$

• Simetría de las abcixas: $x_2 = -x_5$; $x_4 = -x_1$; $x_3 = 0$

• Sistema de ecuaciones (IV-1):

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \frac{Nl^2}{6} = \frac{5l^2}{6} \\ x_1^4 + x_2^4 &= \frac{Nl^4}{10} = \frac{5l^4}{10} = \frac{l^4}{2} \end{aligned} \right\}$$

Eliminando x_2 entre ellas se obtiene la ecuación bicuadrada

$$x_1^4 - \frac{5}{6} l^2 x_1^2 + \frac{7}{72} l^4 = 0$$

cuyas soluciones son las abcixas que buscamos.

$$\boxed{x = \pm l \sqrt{\frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} - \frac{7}{72}}}}$$

es decir,

$$\boxed{x_1 = 0,832497 \cdot l; x_2 = 0,374541 \cdot l; x_3 = 0; x_4 = -0,374541 \cdot l; x_5 = -0,832497 \cdot l}$$

• Integral:

$$I = p \sum y_i \rightarrow \boxed{I = \frac{2l}{5} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)}$$

- Más ordenadas

Al considerar mayor número de ordenadas nos tropezamos con la dificultad de que los sistemas de ecuaciones (III) y (IV), ó (III-1) y (IV-1), no son lineales en x_i .

En la tabla C se dan los coeficientes f_i , hasta 10 ordenadas totales, por lo que habría que multiplicar el semi-intervalo de integración l para conocer la posición de cada abscisa ($x_i = f_i \cdot l$), medidas desde el punto medio del intervalo $l/2$, y así poder determinar sus correspondientes ordenadas y_i de la curva.

Finalmente la integral se resolvería como

$$I = P \sum_{i=1}^N y_i = \frac{2l}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

Consideraciones sobre este método

Este método tiene dos ventajas: que el cálculo de la integral aproximada es muy fácil y que, para el mismo número de ordenadas, tiene mayor precisión que el método anterior. Por contra tiene el inconveniente de que las ordenadas que utiliza están en unas posiciones "especiales" que habría que determinar, y que en general no coincidirán con las secciones o líneas de espesa del buque, por lo que tendríamos que interpolar, por ejemplo gráficamente.

Aunque, en la práctica de los cálculos de Tonaje del Buque, no se suele utilizar este método, para aplicarlo haríamos como con el método de Simpson, dividir la eslora, o la magnitud que correspondiera, en diversas partes, y a cada una de ellas aplicarle el número de ordenadas elegido.

TABLA C

Método de Tchebycheff

Número total de ordenadas (N)	Coeficientes f_i				
	2	$\pm 0,57735027$			
3	$\pm 0,70710678$	0			
4	$\pm 0,79465447$	$\pm 0,18759247$			
5	$\pm 0,83249749$	$\pm 0,37454141$	0		
6	$\pm 0,86624682$	$\pm 0,42251865$	$\pm 0,26663540$		
7	$\pm 0,88386170$	$\pm 0,52965678$	$\pm 0,32391181$	0	
8	$\pm 0,90077581$	$\pm 0,55375475$	$\pm 0,46425325$	$\pm 0,00773337$	
9	$\pm 0,91158927$	$\pm 0,60101986$	$\pm 0,52876057$	$\pm 0,16790621$	0
10	$\pm 0,92127059$	$\pm 0,62317652$	$\pm 0,59196740$	$\pm 0,28123486$	$\pm 0,004178334$

$x_i = f_i \times l$ con x_i referida al punto medio del intervalo de integración (2l).

$$I = \int y \times dx \approx \frac{2l}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

3. MÉTODO DE GAUSS

En el método de Newton-Cotes se fijaban las posiciones de las ordenadas, espaciándolas uniformemente, con lo que nos quedaban N incógnitas, correspondientes a los N multiplicadores de cada ordenada y_i . Para determinarlas necesitaríamos un sistema de N ecuaciones, que se conseguía utilizando un polinomio de ajuste que tuviera N coeficientes, es decir, de grado $N-1$.

En el método de Tchebycheff imponíamos la condición de que solamente había un multiplicador, pero las ordenadas estaban en unas posiciones x_i especiales, que había que determinar, por lo que teníamos $N+1$ incógnitas (1 multiplicador + N valores de x_i). En consecuencia, el polinomio de ajuste debería tener $N+1$ coeficientes, o, lo que es lo mismo, ser de grado N .

El método de Gauss es otra variante de estos procedimientos, en el cual hay que determinar los N multiplicadores p_i y los N posiciones x_i de las ordenadas correspondientes, y_i , siendo la integral aproximada, como siempre, $I = \sum_{i=1}^N p_i \cdot y_i$.

Tenemos por tanto $2N$ incógnitas (N abscisas x_i + N multiplicadores p_i), por lo que necesitamos $2N$ ecuaciones que conseguimos con un polinomio de ajuste que tenga $2N$ coeficientes, es decir, de grado $2N-1$, siempre impar.

Como vemos, para un mismo número de ordenadas, el polinomio de ajuste con este método es el que tiene el mayor grado de los tres, por lo que cabe esperar que se conviga con él el mayor grado de aproximación.

Recordamos que al tomar el origen en el punto medio del intervalo de integración, la integral del polinomio era

$$I = \int_{-l}^{+l} y \cdot dx = 2 \left[a_0 l + a_2 \frac{l^3}{3} + \dots + a_{2n} \frac{l^{2n+1}}{2n+1} \right] \quad (1)$$

tanto si el polinomio era de grado $2n$ como $2n+1$.

- Número de ordenadas par

$$I = \sum_{i=1}^N P_i \cdot y_i \quad \text{con } y_i = \sum_{j=0}^{2N-1} a_j \cdot x_i^j, \text{ sustituyendolo como siempre}$$

$$\left. \begin{aligned} I &= P_1 (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_{2N-1} x_1^{2N-1}) + \\ &+ P_2 (a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_{2N-1} x_2^{2N-1}) + \\ &\quad \vdots \\ &+ P_N (a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + \dots + a_{2N-1} x_N^{2N-1}) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} I &= a_0 (P_1 + P_2 + \dots + P_N) + \\ &+ a_1 (P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_N x_N) + \\ &+ a_2 (P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + \dots + P_N x_N^2) + \\ &\quad \vdots \\ &+ a_{2N-1} (P_1 x_1^{2N-1} + P_2 x_2^{2N-1} + \dots + P_N x_N^{2N-1}) \end{aligned} \right\}$$

Identificando los términos de cada coeficiente con los de la expresión (1)

$$a_0 \rightarrow P_1 + P_2 + \dots + P_N = 2l$$

$$a_1 \rightarrow P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_N x_N = 0 \quad \text{que se cumple con las dos condiciones de simetría}$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_N \\ P_2 &= P_{N-1} \\ &\vdots \\ P_{N/2} &= P_{N/2+1} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -x_N \\ x_2 &= -x_{N-1} \\ &\vdots \\ x_{N/2} &= -x_{N/2+1} \end{aligned} \right\}$$

Resto de los coeficientes pares:

$$a_2 \rightarrow P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + \dots + P_N x_N^2 = 2 \frac{l^3}{3}$$

$$a_{2N-2} \rightarrow P_1 x_1^{2N-2} + P_2 x_2^{2N-2} + \dots + P_N x_N^{2N-2} = 2 \frac{l^{2N-1}}{2N-1}$$

Substituyendo en las ecuaciones de los coeficientes, para las dos condiciones de simetría:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &\rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_{N/2} = l \\ a_2 &\rightarrow p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_{N/2} x_{N/2}^2 = \frac{l^3}{3} \\ &\vdots \\ a_{2N-2} &\rightarrow p_1 x_1^{2N-2} + p_2 x_2^{2N-2} + \dots + p_{N/2} x_{N/2}^{2N-2} = \frac{l^{2N-1}}{2N-1} \end{aligned} \right\} \text{(V)}$$

De este sistema se obtiene la mitad de los multiplicadores y la mitad de las abscisas, el resto se determina por sus respectivas condiciones de simetría.

- Número de ordenadas impar

El desarrollo para obtener las ecuaciones es el mismo, quedándonos:

• Condiciones de simetría

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_N \\ p_2 &= p_{N-1} \\ &\vdots \\ p_{\frac{N-1}{2}} &= p_{\frac{N+3}{2}} \\ p_{\frac{N+1}{2}} & \end{aligned} \right\}$$

y

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -x_N \\ x_2 &= -x_{N-1} \\ &\vdots \\ x_{\frac{N-1}{2}} &= -x_{\frac{N+3}{2}} \\ x_{\frac{N+1}{2}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

• Sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} a_0 &\rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_{\frac{N-1}{2}} + \frac{1}{2} p_{\frac{N+1}{2}} = l \\ a_2 &\rightarrow p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_{\frac{N-1}{2}} x_{\frac{N-1}{2}}^2 = \frac{l^3}{3} \\ &\vdots \\ a_{2N-2} &\rightarrow p_1 x_1^{2N-2} + p_2 x_2^{2N-2} + \dots + p_{\frac{N-1}{2}} x_{\frac{N-1}{2}}^{2N-2} = \frac{l^{2N-1}}{2N-1} \end{aligned} \right\} \text{(VI)}$$

Casos prácticos

- Das ordenadas : $I = p_1 y_1 + p_2 y_2$

• $N=2$ (par) El grado de la parábola de ajuste es $2N-1=3$

• Condiciones de simetría: $p_1 = p_2$ y $x_1 = -x_2$

• Sistema de ecuaciones (V)

$$p_1 = l \left\{ \begin{array}{l} \longrightarrow p = l \\ p_1 x_1^2 = \frac{l^3}{3} \rightarrow l x_1^2 = \frac{l^3}{3} \rightarrow x_1 = l \sqrt{\frac{1}{3}} \end{array} \right\}$$

Si hacemos $l=1$ para dejarlo en forma fraccional de l

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = p_2 = 1 \\ f = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0,57735 \end{array} \right\}$$

Quedándonos así la integral $I = l(p_1 y_1 + p_2 y_2) \rightarrow \boxed{I = l(y_1 + y_2)}$

con y_1 e y_2 situados en $+l\sqrt{\frac{1}{3}} = +0,57735 \cdot l$ y $-l\sqrt{\frac{1}{3}} = -0,57735 \cdot l$ desde el punto medio del intervalo de integración.

Si nos fijamos, el método de Gauss y el de Tchebysheff coinciden para 2 ordenadas.

- Tres ordenadas : $I = p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3$

• $N=3$ (impar) El grado de la parábola de ajuste es $2N-1=2 \cdot 3-1=5$

• Condiciones de simetría: $p_1 = p_3$ y $x_1 = -x_3$; $x_2 = 0$

• Sistema de ecuaciones (VI):

$$\left. \begin{array}{l} p_1 + \frac{1}{2} p_2 = l \\ p_1 x_1^2 = \frac{l^3}{3} \\ p_1 x_1^4 = \frac{l^5}{5} \end{array} \right\}$$

Si hacemos ya directamente $l=1$ para ponerlo en forma fraccional de l

$$\left. \begin{array}{l} p_1 + \frac{1}{2} p_2 = 1 \\ p_1 \cdot f_1^2 = \frac{1}{3} \\ p_1 \cdot f_1^4 = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \rightarrow p_1 = \frac{1}{3f_1^2}$$

$$\frac{1}{3-f_1^2} = f_1^4 = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{f_1^2}{3} = \frac{1}{5} \rightarrow f_1^2 = \frac{3}{5} \rightarrow f_1 = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} = \pm 0,77460$$

$$p_1 = \frac{1}{3f_1^2} = \frac{1}{3 \cdot \frac{3}{5}} \rightarrow p_1 = \frac{5}{9} = 0,55556 \quad (=p_2)$$

$$p_1 + \frac{1}{2} p_2 = 1 \rightarrow \frac{5}{9} + \frac{p_2}{2} = 1 \rightarrow p_2 = 2 \left(1 - \frac{5}{9}\right) \rightarrow p_2 = \frac{8}{9} = 0,88889$$

La integral $I = \sum p_i \cdot y_i \rightarrow I = l \sum p_i \cdot y_i = l \left(\frac{5}{9} y_1 + \frac{8}{9} y_2 + \frac{5}{9} y_3 \right) \rightarrow$

$$I = \frac{l}{9} (5y_1 + 8y_2 + 5y_3)$$

con las ordenadas situadas en $x_2 = 0$; $x_1 = l\sqrt{\frac{3}{5}}$ y $x_3 = -l\sqrt{\frac{3}{5}}$, todas ellas referidas al punto medio del intervalo de integración.

- Más ordenadas

Para obtener los valores de p_i y de x_i en función del número de ordenadas N , tenemos que resolver los sistemas de ecuaciones no lineales (V) o (VI).

En la tabla D se dan, hasta 5 ordenadas totales, las posiciones de los abscisas, de las correspondientes ordenadas, medidas desde el punto medio del intervalo de integración $]-l; +l[$, y sus respectivos multiplicadores, ambos como fracciones del semi-intervalo l . Así tendríamos:

Abscisas: $x_i = f_i \cdot l$

Integral: $I = \sum_{i=1}^N p_i \cdot y_i = I = \sum_{i=1}^N p_i \cdot l \cdot y_i \rightarrow I = l \sum_{i=1}^N p_i \cdot y_i$

TABLA D

Método de Gauss

Número total de ordenadas (N)	Coeficientes de abscisas f_i y multiplicadores p_i			
	2	f_i	$\pm 0,57735$	
p_i		1		
3	f_i	0	$\pm 0,77460$	
	p_i	0,88889	0,55556	
4	f_i	$\pm 0,33998$	$\pm 0,86114$	
	p_i	0,65214	0,34786	
5	f_i	0	$\pm 0,53847$	$\pm 0,90618$
	p_i	0,56890	0,47862	0,23692

$x_i = f_i \times l$ con x_i referida al punto medio del intervalo de integración (2l).

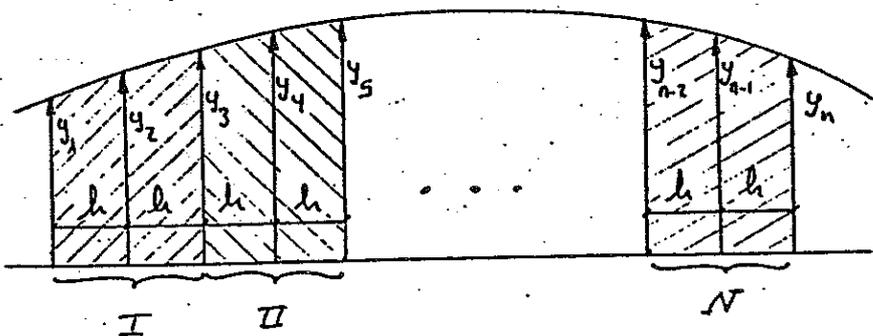
$$I = \int y \times dx \approx l \sum_{i=1}^N p_i \times y_i$$

MÉTODO DE SIMPSON: AGRUPACIÓN DE INTERVALOS DE INTEGRACIÓN

Hoy en día, con la extensión del uso de los ordenadores, la utilización de los métodos de integración aproximada que hemos comentado no presentaría ningún problema; sin embargo, por tradición y por la ventaja que representa la repartición uniforme entre las secciones o las líneas de agua del buque, se sigue utilizando preferentemente el método de Simpson, normalmente la primera regla.

Ahora bien, la integral de una función, por ejemplo el área encerrada por toda una línea de agua, no sería conveniente calcularla solamente con tres ordenadas (primera regla), o con cuatro (segunda regla), porque los resultados obtenidos serían muy pobres. Lo que se hace es subdividir el intervalo total de integración en un mayor número de subintervalos, cada uno de ellos con su correspondiente número de ordenadas, repartidas una distancia uniforme (h), y después sumarlas todas.

Como lo normal es trabajar con la primera regla, vamos a hacer el razonamiento con ella (con la segunda sería totalmente análogo).



$$I = I_I + I_{II} + \dots + I_N$$

Por ahora estamos considerando que el intervalo entre ordenadas h es el mismo en cualquiera de los subintervalos.

Para poder obtener la integral I podemos aplicar el método de Simpson a cada uno de los subintervalos I_i , anotar su resultado parcial y después simplemente sumarlos todos. Sin embargo, la práctica común, para facilitar los cálculos, consiste en agrupar todos los términos

sacando los correspondientes factores comunes.

$$I = I_I + I_{II} + I_{III} + \dots + I_N \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3} [1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3] + \\ &+ \frac{h}{3} [1 \cdot y_3 + 4 \cdot y_4 + 1 \cdot y_5] + \\ &+ \frac{h}{3} [1 \cdot y_5 + 4 \cdot y_6 + 1 \cdot y_7] + \\ &\vdots \\ &+ \frac{h}{3} [1 \cdot y_{n-2} + 4 \cdot y_{n-1} + 1 \cdot y_n] \end{aligned}$$

Agrupando términos, y sacando $h/3$ factor común, nos queda:

$$I = \frac{h}{3} [1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + 4 \cdot y_4 + 2 \cdot y_5 + 4 \cdot y_6 + 2 \cdot y_7 + \dots + 2 \cdot y_{n-2} + 4 \cdot y_{n-1} + 1 \cdot y_n]$$

que más simplificado lo expresamos como

$$I = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i$$

viendo ahora la secuencia de los factores de Simpson $\{1; 4; 2; 4; 2; \dots; 2; 4; 1\}$

Si nos fijamos, todas las ordenadas que vienen multiplicadas por el factor 2, como $y_3; y_5;$ etc., es porque cada una de ellas pertenece a la vez a dos subintervalos consecutivos.

Para aplicar correctamente esta agrupación es muy importante el que nos aseguramos de que el intervalo entre ordenadas es uniforme y, además, de que el número de ordenadas que estamos utilizando es el correcto. Una regla práctica para esto último sería el comprobar que la cadencia de los factores de Simpson, según las ordenadas que estamos utilizando, acabe en $\{\dots; 4; 1\}$, y nunca en $\{\dots; 2; 1\}$

Aunque su utilización no es corriente, si hubiéramos hecho la agrupación utilizando la segunda regla de Simpson, la expresión que se obtiene es:

$$I = \frac{3}{8} h [1 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 + 2 \cdot y_4 + 3 \cdot y_5 + 3 \cdot y_6 + 2 \cdot y_7 + \dots + 2 \cdot y_{n-3} + 3 \cdot y_{n-2} + 3 \cdot y_{n-1} + 1 \cdot y_n]$$

que expresado más simplificada mente sería

$$I = \frac{3}{8} h \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i$$

siendo ahora los factores de Simpson $\{1, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, \dots, 2, 3, 3, 1\}$

En los casos excepcionales en los que no podamos aplicar la agrupación de la primera regla sola, ni tampoco de la segunda sola, tendremos que hacer una combinación de ambas. Por ejemplo, supongamos que disponemos de 6 ordenadas para hacer la integración. Si nos fijamos, en este caso, vemos que no admite la agrupación de ninguna de las dos reglas. Pero su resolución podríamos aplicar la primera regla a las tres primeras ordenadas y la segunda al resto de ellas.

$$I = I_I + I_{II} = \frac{h}{3} [1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3] + \frac{3}{8} h [1 \cdot y_3 + 3 \cdot y_4 + 3 \cdot y_5 + 1 \cdot y_6]$$

Para expresarlo de forma similar a los casos anteriores, metamos el $1/3$ de I_I y el $3/8$ de I_{II} dentro de los corchetes,

$$I = h \left[\frac{1}{3} y_1 + \frac{4}{3} y_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{8} \right) \cdot y_3 + \frac{9}{8} y_4 + \frac{9}{8} y_5 + \frac{3}{8} y_6 \right] = h \sum_1^n F_i' \cdot y_i$$

Asimismo, también podríamos haber aplicado la segunda regla en primer lugar a las ordenadas $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ y la primera al resto $\{y_4, y_5, y_6\}$. El resultado final en ambos casos debería ser igual, si bien pudieran aparecer algunas ligeras diferencias por la aproximación del método.

Ordenadas intermedias en las reglas de Simpson

En la pregunta anterior, sobre la agrupación de los intervalos de integración, hemos supuesto que la distancia entre ordenadas, 'h', era sim. pre la misma en todos los subintervalos de integración. Sin embargo, hay zonas, como por ejemplo los extremos de proa y popa de una línea

de agua, en las que las variaciones de curvatura son mucho mayores que en el resto, por lo que, para conseguir una mayor definición en esas partes, la distancia entre ordenadas debe ser menor. Por facilidad de cálculo conviene que, en estos casos, la distancia h la dividamos por un número sencillo, lo habitual es $h/2$ ó $h/4$

Sea un subintervalo de integración i , en el que su distancia entre ordenadas es $h_i = h/n_i$. Si queremos agruparlo con el resto de los subintervalos debemos uniformar el valor de h , por lo que el divisor n_i habrá que incorporarlo a los factores de Simpson normales. Así, si por ejemplo, estamos aplicando la primera regla

$$I_i = \frac{h_i}{3} [1 \cdot y_m + 4 \cdot y_{m+1} + 1 \cdot y_{m+2}] = \frac{(h/n_i)}{3} [1 \cdot y_m + 4 \cdot y_{m+1} + 1 \cdot y_{m+2}] \rightarrow$$

$$I_i = \frac{h}{3} \left[\left(\frac{1}{n_i}\right) \cdot y_m + \left(\frac{4}{n_i}\right) \cdot y_{m+1} + \left(\frac{1}{n_i}\right) \cdot y_{m+2} \right]$$

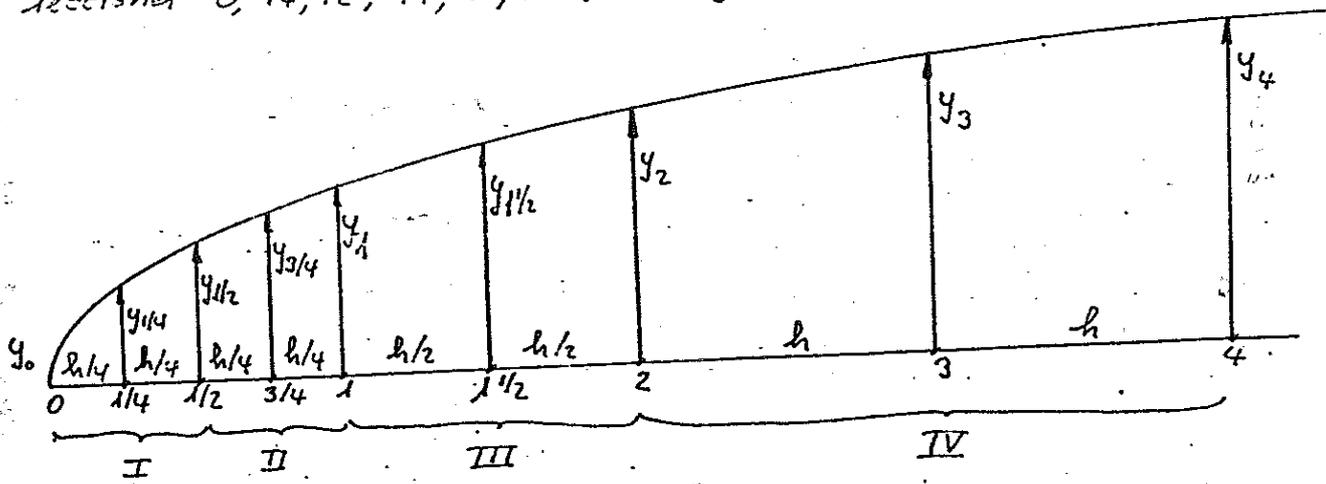
y al agruparlo con el resto de los subintervalos nos queda una expresión del tipo

$$I = \sum I_i = \frac{h}{3} \sum FS_i \cdot y_i \quad \text{ó} \quad I = \frac{h}{3} \sum FS_i \cdot y_i$$

Cuando se aplique esto, para evitar errores, conviene tener siempre presentes los siguientes puntos:

- En cada subintervalo de integración i , la distancia entre sus ordenadas, h ó h_i , debe ser siempre la misma.
- Las ordenadas extremas de cada subintervalo de integración (las que vienen multiplicadas por el factor de Simpson 1, ó $1/n_i$), pueden pertenecer a dos subintervalos de integración distintos, por lo que habrá que tenerlo siempre en cuenta, y sumar sus factores cuando hagamos la agrupación ($(1+1)$ ó $(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i+1}})$).
- Ante el gran volumen de cifras que aparecen cuando se aplica este procedimiento conviene ser muy cuidadoso y seguir un método, por lo que se aconseja muy vivamente ordenar los datos en forma de tabla, como el programa de una hoja de cálculo en un ordenador.

Veamos un ejemplo, supongamos que queremos calcular el área de una línea de agua entre las secciones 0 y 4. Para ello vamos a considerar las secciones 0, $1/4$, $1/2$, $3/4$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, 3 y 4.



$$A = A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV}$$

Como podemos observar, tenemos que aplicar la primera regla.

$$\left. \begin{aligned} A_I &= \frac{(h/4)}{3} [y_0 + 4 \cdot y_{1/4} + y_{1/2}] = \frac{h}{3} \left[\frac{1}{4} \cdot y_0 + \frac{4}{4} \cdot y_{1/4} + \frac{1}{4} \cdot y_{1/2} \right] \\ A_{II} &= \frac{(h/4)}{3} [y_{1/2} + 4 \cdot y_{3/4} + y_1] = \frac{h}{3} [0,25 \cdot y_{1/2} + 1 \cdot y_{3/4} + 0,25 \cdot y_1] \\ A_{III} &= \frac{(h/2)}{3} [y_1 + 4 \cdot y_{1\frac{1}{2}} + y_2] = \frac{h}{3} [0,5 \cdot y_1 + 2 \cdot y_{1\frac{1}{2}} + 0,5 \cdot y_2] \\ A_{IV} &= \frac{h}{3} [y_2 + 4 \cdot y_3 + y_4] \end{aligned} \right\}$$

Agrupando y sacando $h/3$ factor común

$$A = \frac{h}{3} [0,25 \cdot y_0 + 1 \cdot y_{1/4} + (0,25 + 0,25) \cdot y_{1/2} + 1 \cdot y_{3/4} + (0,25 + 0,5) \cdot y_1 + 2 \cdot y_{1\frac{1}{2}} + (0,5 + 1) \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4]$$

$$A = \frac{h}{3} [0,25 \cdot y_0 + 1 \cdot y_{1/4} + 0,5 \cdot y_{1/2} + 1 \cdot y_{3/4} + 0,75 \cdot y_1 + 2 \cdot y_{1\frac{1}{2}} + 1,5 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4]$$

y expresado más esquemáticamente $A = \frac{h}{3} \sum F S_i \cdot y_i$

La ordenación de los datos para realizar los cálculos podría ser:

Semimana de cada lección	FS	FS * y
I	$1 \cdot \frac{1}{4} = 0,25$	$0,25 \cdot y_0$
	$4 \cdot \frac{1}{4} = 1$	$1 \cdot y_{1/4}$
II	$1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0,5$	$0,5 \cdot y_{1/2}$
	$4 \cdot \frac{1}{4} = 1$	$y_{3/4}$
III	$1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0,75$	$0,75 \cdot y_1$
	$4 \cdot \frac{1}{2} = 2$	$2 \cdot y_{1/2}$
IV	$1 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1,5$	$1,5 \cdot y_2$
	4	$4 \cdot y_3$
	1	y_4

$$A = \frac{h}{3} \sum FS_i \cdot y_i$$

(En realidad este A sería el área de la semiflotación ya que hemos utilizado las semimanas y_i .)

TOTAL $\sum FS_i \cdot y_i$

EJEMPLO DE APLICACIÓN

- Método de Simpson

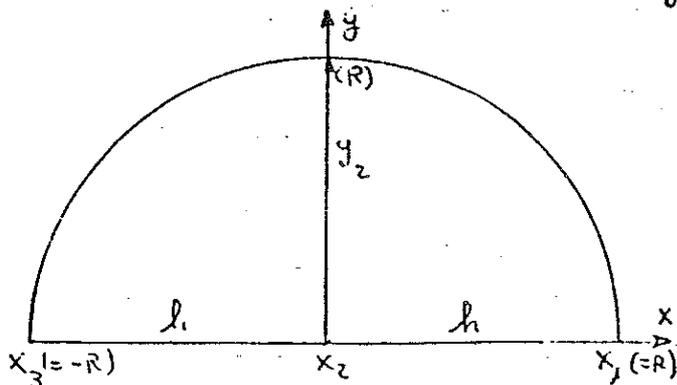
Para ver cómo ganemos precisión con este método a medida que aumentamos el número de ordenadas, vamos a ir calculando el área de un semicírculo de radio $R=6$

Las magnitudes de las distintas ordenadas que vayamos necesitando las deducimos de la ecuación de la circunferencia respecto de unos ejes con origen en su centro.

$$x^2 + y^2 = R^2 = 36 \rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$\text{El área "exacta" será: } A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} \rightarrow A = 56,549\dots$$

a) Tres ordenadas \rightarrow Primera regla



$$\left. \begin{aligned} h &= R = 6 \\ x_1 = R = 6 &\rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 0 &\rightarrow y_2 = R = 6 \\ x_3 = -x_1 = -6 &\rightarrow y_3 = 0 \end{aligned} \right\}$$

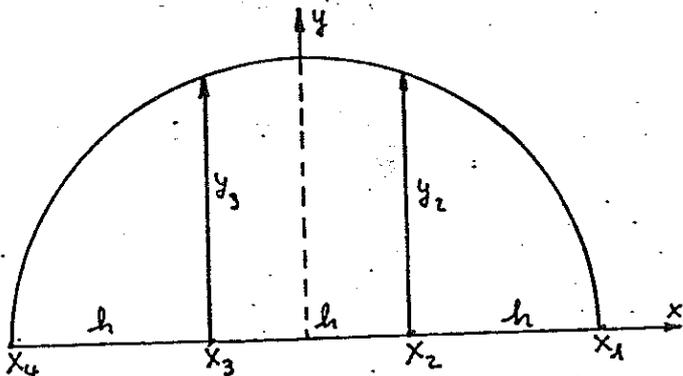
$$A \approx \frac{h}{3} [y_1 + 4y_2 + y_3] = \frac{6}{3} [0 + 4 \cdot 6 + 0] \rightarrow A \approx 48$$

El error cometido es

$$E = \frac{56,549 - 48}{56,549} \times 100 \rightarrow E \approx 15\%$$

que resulta un error excesivo.

b) Cuatro ordenadas \rightarrow Segunda regla.



$$2R = 3h \rightarrow h = \frac{2 \cdot R}{3} = \frac{2 \cdot 6}{3} \rightarrow$$

$$h = 4$$

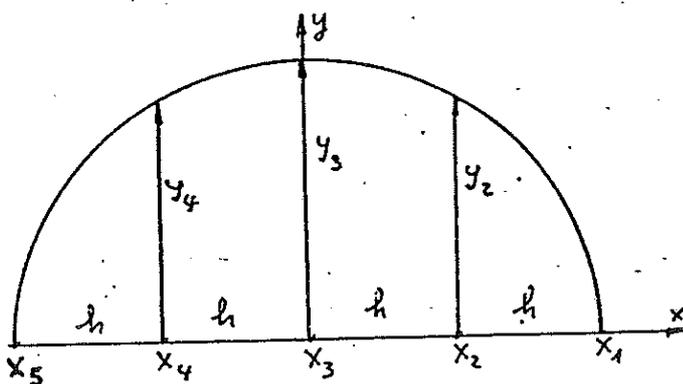
$$\left. \begin{aligned} x_1 = R = 6 &\rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = R - h = 6 - 4 = 2 &\rightarrow y_2 = 5,657 \\ x_3 = -x_2 = -2 &\rightarrow y_3 = 5,657 \\ x_4 = -x_1 = -6 &\rightarrow y_4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$A \approx \frac{3}{8} h [y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4] = \frac{3}{8} \cdot 4 \cdot [0 + 3 \cdot 5,657 + 3 \cdot 5,657 + 0] \rightarrow A \approx 50,912$$

$$E = \frac{56,549 - 50,912}{56,549} \times 100 \rightarrow E \approx 10\%$$

Aunque hemos mejorado bastante, el error sigue siendo excesivo.

c) Cinco ordenadas \rightarrow Primera regla



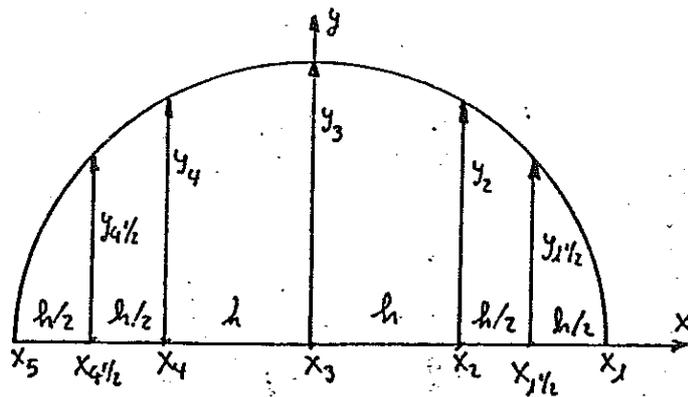
$$2R = 4h \rightarrow h = \frac{2R}{4} = \frac{2 \cdot 6}{4} \rightarrow h = 3$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 = R = 6 &\rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = h = 3 &\rightarrow y_2 = 5,196 \\ x_3 = 0 &\rightarrow y_3 = R = 6 \\ x_4 = -x_2 = -3 &\rightarrow y_4 = 5,196 \\ x_5 = -x_1 = -6 &\rightarrow y_5 = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$A \approx \frac{h}{3} [y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_5] = \frac{3}{3} [0 + 4 \cdot 5,196 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5,196 + 0] \rightarrow$$

$$A \approx 53,569 \rightarrow E = \frac{56,549 - 53,569}{56,549} \times 100 \rightarrow E \approx 5\%$$

d) Cinco ordenadas más las intermedias $1\frac{1}{2}$ y $4\frac{1}{2}$ → Primera regla



h sigue siendo 3

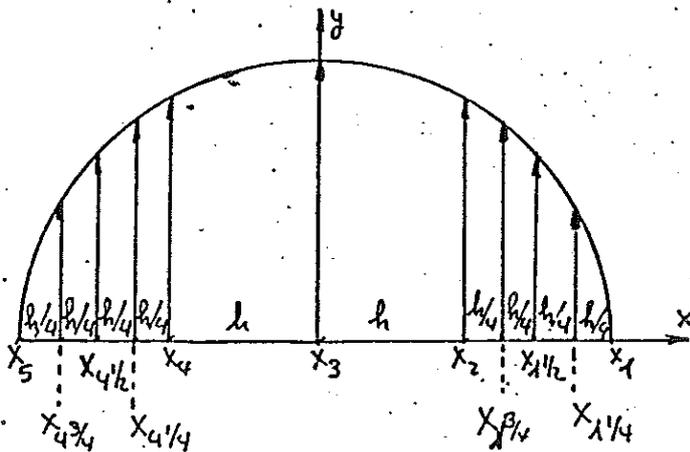
Núm	x	y	FS	FS·y
1	6	0	$(1 \cdot \frac{1}{2}) = 0,5$	0
$1\frac{1}{2}$	4,5	3,969	$(\frac{4}{2}) = 2$	7,937
2	3	5,196	$(\frac{1}{2} + 1) = 1,5$	7,794
3	0	6	4	24,-
4	-3	5,196	$(1 + \frac{1}{2}) = 1,5$	7,794
$4\frac{1}{2}$	-4,5	3,969	$(\frac{4}{2}) = 2$	7,937
5	-6	0	$(\frac{1}{2}) = 0,5$	0
TOTAL				55,463

$$A = \frac{h}{3} \sum FS \cdot y = \frac{3}{3} \cdot 55,463 \rightarrow A \approx 55,463$$

$$E = \frac{56,549 - 55,463}{56,549} \cdot 100 \rightarrow E \approx 2\%$$

que es el margen de error con el que ordinariamente se trabaja en Teoría del Buzo.

e) Cinco ordenadas más las intermedias: $1\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{2}$; $1\frac{3}{4}$; $4\frac{1}{4}$; $4\frac{1}{2}$; $4\frac{3}{4}$ → Primera regla.



$h = 3$

Núm.	x	y	FS	FS·y
1	6	0	$(1 \cdot \frac{1}{4}) = 0,25$	0
$1\frac{1}{4}$	5,25	2,905	$(\frac{4}{4}) = 1$	2,905
$1\frac{1}{2}$	4,5	3,969	$(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}) = 0,5$	1,984
$1\frac{3}{4}$	3,75	4,684	$(\frac{4}{4}) = 1$	4,684
2	3	5,196	$(\frac{1}{4} + 1) = 1,25$	6,495
3	0	6	4	24,-
4	-3	5,196	$(1 + \frac{1}{4}) = 1,25$	6,495
$4\frac{1}{4}$	-3,75	4,684	$(\frac{4}{4}) = 1$	4,684
$4\frac{1}{2}$	-4,5	3,969	$(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}) = 0,5$	1,984
$4\frac{3}{4}$	-5,25	2,905	$(\frac{4}{4}) = 1$	2,905
5	-6	0	$(\frac{1}{4}) = 0,25$	0
TOTAL				56,136

$$A = \frac{h}{3} \sum FS \cdot y = \frac{3}{3} \cdot 56,136 \rightarrow$$

$$A \approx 56,136$$

$$E = \frac{56,549 - 56,136}{56,549} \cdot 100 \rightarrow E \approx 0,73\%$$

En una página aparte se adjuntan estos mismos cálculos obtenidos en un ordenador con una «hoja de cálculo».

- Método de Newton-Cotes

Para poder compararlos también se ha calculado el área del semicírculo por el método de Newton-Cotes con una «hoja de cálculo» y utilizando la tabla B.

El intervalo entre ordenadas h se obtiene dividiendo el intervalo total ($2R = 2 \times 6 = 12$), entre el número de intervalos entre ordenadas, es decir, el número de ordenadas totales menos uno.

El porcentaje de error se ha calculado de la forma ya vista

$$E\% = \frac{|\text{área "exacte"} - \text{área aproximada}|}{\text{área "exacte"}} \times 100$$

Como cabía esperar, el error disminuye al aumentar el número de ordenadas. Sin embargo, aunque este valor depende mucho de la función integrada, vemos que no es mejor que cuando se aplica el método de Simpson con aproximación de intervalos para un número de ordenadas similar.

- Método de Tchebycheff

El mismo ejemplo que venimos considerando se ha calculado con el método de Tchebycheff. Para ello se ha utilizado la tabla C para obtener la posición de las ordenadas ($x_i = f_i \cdot l = f_i \cdot R = f_i \cdot 6$), y la integral: $I = \int_{-l}^l y_i \cdot \frac{2l}{N} dx_i$;

$$I = \frac{2 \cdot 6}{N} \sum y_i$$

Como vemos, para el mismo número de ordenadas, el porcentaje de error es muchísimo menor que con cualquiera de los dos métodos anteriores.

- Método de Gauss

En este caso hemos utilizado la tabla D para obtener los valores de las abscisas ($x_i = f_i + l$) que nos determinan la posición de las ordenadas y_i a considerar, así como sus correspondientes multiplicadores en forma fraccional, siendo entonces la integral:

$$I = l \sum \phi \cdot y$$

Como se puede apreciar claramente, con bastantes menos ordenadas en cada caso, este método es el más preciso. La razón, como ya se ha dicho, es que el polinomio de ajuste es de un grado mucho mayor.

Area = 56,5486678

Método de Simpson

Número de ordenada	h	x	y	FS	FS x y	I	% Error
1	6	6	0	1	0		
2		0	6	4	24		
3		-6	0	1	0		
Total					24	48	15,12
1	4	6	0	1	0		
2		2	5,65685425	3	16,9705627		
3		-2	5,65685425	3	16,9705627		
4		-6	0	1	0		
Total					33,9411255	50,9116882	9,97
1	3	6	0	1	0		
2		3	5,19615242	4	20,7846097		
3		0	6	2	12		
4		-3	5,19615242	4	20,7846097		
5		-6	0	1	0		
Total					53,5692194	53,5692194	5,27
1	3	6	0	0,5	0		
1 1/2		4,5	3,96862697	2	7,93725393		
2		3	5,19615242	1,5	7,79422863		
3		0	6	4	24		
4		-3	5,19615242	1,5	7,79422863		
4 1/2		-4,5	3,96862697	2	7,93725393		
5		-6	0	0,5	0		
Total					55,4629651	55,4629651	1,92
1	3	6	0	0,25	0		
1 1/4		5,25	2,90473751	1	2,90473751		
1 1/2		4,5	3,96862697	0,5	1,98431348		
1 3/4		3,75	4,6837485	1	4,6837485		
2		3	5,19615242	1,25	6,49519053		
3		0	6	4	24		
4		-3	5,19615242	1,25	6,49519053		
4 1/4		-3,75	4,6837485	1	4,6837485		
4 1/2		-4,5	3,96862697	0,5	1,98431348		
4 3/4		-5,25	2,90473751	1	2,90473751		
5		-6	0	0,25	0		
Total					56,13598	56,13598	0,73

Area = 56,5486678

Método de Newton - Cotes

Núm. total de ordenadas	h	x	y	Factor	Factor x y	I	% Error
2	12	6	0	1	0		
		-6	0	1	0		
Total					0	0	100
3	6	6	0	1	0		
		0	6	4	24		
		-6	0	1	0		
Total					24	48	15,12
4	4	6	0	1	0		
		2	5,65685425	3	16,9705627		
		-2	5,65685425	3	16,9705627		
		-6	0	1	0		
Total					33,9411255	50,9116882	9,97
5	3	6	0	7	0		
		3	5,19615242	32	166,276878		
		0	6	12	72		
		-3	5,19615242	32	166,276878		
		-6	0	7	0		
Total					404,553755	53,9405007	4,61
6	2,4	6	0	19	0		
		3,6	4,8	75	360		
		1,2	5,87877538	50	293,938769		
		-1,2	5,87877538	50	293,938769		
		-3,6	4,8	75	360		
		-6	0	19	0		
Total					1307,87754	54,4948974	3,63
7	2	6	0	41	0		
		4	4,47213595	216	965,981366		
		2	5,65685425	27	152,735065		
		0	6	272	1632		
		-2	5,65685425	27	152,735065		
		-4	4,47213595	216	965,981366		
		-6	0	41	0		
Total					3869,43288	55,2776123	2,25
8	1,71428571	6	0	751	0		
		4,28571429	4,19912527	3577	15020,2711		
		2,57142857	5,42104742	1323	7172,04573		
		0,85714288	5,93845991	2989	17750,0567		
		-0,85714286	5,93845991	2989	17750,0567		
		-2,57142857	5,42104742	1323	7172,04573		
		-4,28571429	4,19912527	3577	15020,2711		
		-6	0	751	0		
Total					79884,747	55,4755188	1,90
9	1,5	6	0	989	0		
		4,5	3,96862697	5888	23367,2756		
		3	5,19615242	-928	-4822,02945		
		1,5	5,80947502	10496	60976,2498		
		0	6	-4540	-27240		
		-1,5	5,80947502	10496	60976,2498		
		-3	5,19615242	-928	-4822,02945		
		-4,5	3,96862697	5888	23367,2756		
		-6	0	989	0		
Total					131802,992	55,7896262	1,34
10	1,33333333	6	0	2857	0		
		4,66666667	3,77123617	15741	59363,0285		
		3,33333333	4,98887652	1080	5387,98664		
		2	5,65685425	19344	109426,189		
		0,66666667	5,96284794	5778	34453,3354		
		-0,66666667	5,96284794	5778	34453,3354		
		-2	5,65685425	19344	109426,189		
		-3,33333333	4,98887652	1080	5387,98664		
		-4,66666667	3,77123617	15741	59363,0285		
		-6	0	2857	0		
Total					417261,078	55,8831801	1,18

Area = 56,5486678

Método de Tchebycheff

Núm. total de ordenadas	$p = 2l/N$	l	$x = f \cdot l$	y	l	% Error
2	6	0,57735027	3,46410162	4,89897949		
		-0,57735027	-3,46410162	4,89897949		
Total				9,79795897	58,7877538	3,96
3	4	0,70710678	4,24264069	4,24264069		
		0	0	6		
		-0,70710678	-4,24264069	4,24264069		
Total				14,4852814	57,9411255	2,46
4	3	0,79465447	4,76792683	3,64237199		
		0,18759247	1,12555484	5,89348168		
		-0,18759247	-1,12555484	5,89348168		
		-0,79465447	-4,76792683	3,64237199		
Total				19,0717073	57,215122	1,18
5	2,4	0,83249749	4,99498492	3,32417292		
		0,37454141	2,24724846	5,56326113		
		0	0	6		
		-0,37454141	-2,24724846	5,56326113		
		-0,83249749	-4,99498492	3,32417292		
Total				23,7748681	57,0596834	0,90
6	2	0,8662462	5,1974772	2,99770425		
		0,42251865	2,5351119	5,43812538		
		0,2666354	1,5998124	5,78278482		
		-0,2666354	-1,5998124	5,78278482		
		-0,42251865	-2,5351119	5,43812538		
		-0,8662462	-5,1974772	2,99770425		
Total				28,4372289	56,8744578	0,58
7	1,71428571	0,8838617	5,3031702	2,80648995		
		0,52965678	3,17794068	5,08927235		
		0,32391181	1,94347088	5,67652367		
		0	0	6		
		-0,32391181	-1,94347088	5,67652367		
		-0,52965678	-3,17794068	5,08927235		
		-0,8838617	-5,3031702	2,80648995		
Total				33,1445719	56,8192662	0,48
8	1,5	0,90077581	5,40465488	2,6057064		
		0,55375475	3,3225285	4,9960789		
		0,46425325	2,7855195	5,314215		
		0,00773337	0,04640022	5,99982058		
		-0,00773337	-0,04640022	5,99982058		
		-0,46425325	-2,7855195	5,314215		
		-0,55375475	-3,3225285	4,9960789		
		-0,90077581	-5,40465488	2,6057064		
Total				37,8316418	56,7474627	0,35
9	1,33333333	0,91158927	5,46953562	2,46661308		
		0,60101986	3,60611916	4,79540453		
		0,52876057	3,17256342	5,09262617		
		0,16790621	1,00743726	5,91481785		
		0	0	6		
		-0,16790621	-1,00743726	5,91481785		
		-0,52876057	-3,17256342	5,09262617		
		-0,60101986	-3,60611916	4,79540453		
		-0,91158927	-5,46953562	2,46661308		
Total				42,5389233	56,7185644	0,30
10	1,2	0,92127059	5,52762354	2,33353337		
		0,62317652	3,73905912	4,69248728		
		0,5919674	3,5518044	4,83577145		
		0,28123486	1,68740916	5,75783382		
		0,00417833	0,02507	5,99994762		
		-0,00417833	-0,02507	5,99994762		
		-0,28123486	-1,68740916	5,75783382		
		-0,5919674	-3,5518044	4,83577145		
		-0,62317652	-3,73905912	4,69248728		
		-0,92127059	-5,52762354	2,33353337		
Total				47,2391471	56,6869765	0,24

Area = 56,5486678

Método de Gauss

Núm. total de ordenadas	p	f	x = f x l	y	p x y	l	% Error
2	1	0,57735	3,46410162	4,89897949	4,89897949		
	1	-0,57735	-3,46410162	4,89897949	4,89897949		
Total					9,79795897	58,7877538	3,96
3	0,55556	0,77460	4,64758002	3,79473319	2,10818511		
	0,88889	0	0	6	5,33333333		
	0,55556	-0,77460	-4,64758002	3,79473319	2,10818511		
Total					9,54970355	57,2982213	1,33
4	0,34786	0,86114	5,16684	3,05020727	1,0610451		
	0,65214	0,33998	2,03988	5,642596	3,67976255		
	0,65214	-0,33998	-2,03988	5,642596	3,67976255		
	0,34786	-0,86114	-5,16684	3,05020727	1,0610451		
Total					9,48161531	56,8896919	0,60
5	0,23692	0,90618	5,43708	2,53735316	0,60114971		
	0,47862	0,53847	3,23082	5,05586809	2,41983958		
	0,56890	0	0	6	3,4134		
	0,47862	-0,53847	-3,23082	5,05586809	2,41983958		
	0,23692	-0,90618	-5,43708	2,53735316	0,60114971		
Total					9,45537859	56,7322716	0,32

OTRAS APLICACIONES DEL MÉTODO DE SIMPSON

El método de Simpson es un método de integración aproximada que tiene una utilización muy general, no solamente para calcular áreas (m^2 en sentido estricto), sino también volúmenes, momentos estáticos, momentos de inercia, etc.

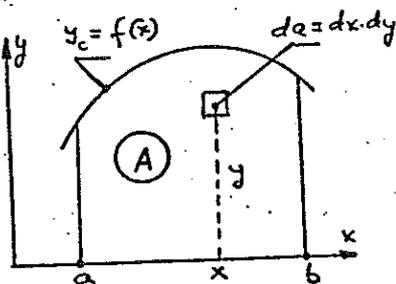
En estas aplicaciones, lo primero que hay que hacer es definir la función integrando $f(x)$ para conocer las "ordenadas", a las que habrá que multiplicar por los correspondientes factores de Simpson.

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \begin{cases} \frac{h}{3} \sum_{i=0}^n f(x_i) \\ \frac{3}{8} h \sum_{i=0}^n f(x_i) \end{cases}$$

Por lo que respecta a las unidades, h tendrá las unidades de la variable independiente (dx), y la integral I el producto de las unidades de $f(x)$ por dx .

A continuación vamos a comentar cómo definiremos la función integrando en las aplicaciones más frecuentes.

- Momento estático de un área plana con relación al eje x



Sea un área plana A limitada por una curva $y_c = f(x)$ y el eje de abscisas entre $x=a$ y $x=b$.

Si consideremos el área genérica más elemental en coordenadas cartesianas $da = dx \cdot dy$, situada en unas coordenadas $(x; y)$ cualesquiera dentro del área A , por definición, su momento estático

con relación al eje x , dm_x , será:

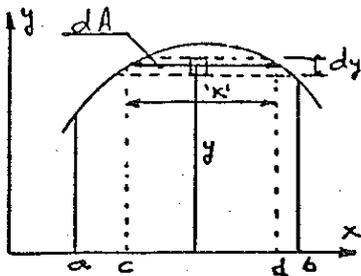
$$dm_x = y \cdot da = y \cdot dx \cdot dy$$

y el momento estático m_x de toda el área A será la suma (integral) de todos los momentos estáticos elementales dm_x , que será una integral doble al tener dos variables de integración

$$m_x = \int_A dm_x = \iint y \cdot dx \cdot dy$$

Desde el punto de vista del cálculo integral es indiferente que para su resolución integremos primero respecto a x , y después respecto a y , o a la inversa.

a) Integrando primero respecto de x .



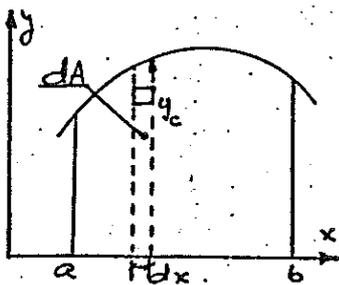
$$m_x = \int_0^{y_{\max}} y \, dy \int_c^d dx = \int_0^{y_{\max}} y \cdot x' \, dy$$

Esto es lo mismo que si hubiéramos considerado de entrada un elemento de área del tipo $dA = x' \cdot dy$ (y nos hubiéramos ahorrado la integral doble).

$$m_x = \int_0^{y_{\max}} y \cdot dA = \int_0^{y_{\max}} y \cdot x' \, dy$$

Esta es la forma tradicional como se aborda este tipo de cálculos. Ahora bien para poder resolver la integral necesitamos conocer la función $y_c = f(x)$, o mejor dicho, $x = f^{-1}(y)$. Sin embargo, en Teoría del Buzque, lo normal es que sólo dispongamos de valores discretos de y_c , por lo que esta alternativa no se suele utilizar.

b) Integrando primero respecto de y .



$$m_x = \iint y \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_0^{y_c} y \, dy = \int_a^b \frac{1}{2} y_c^2 \, dx$$

Para recordar esta expresión, y hacer sólo una integral, podríamos considerar un área elemental $dA = y_c \cdot dx$, como un rectángulo vertical.

El momento con relación al eje x de este rectángulo sería

$$dm_x = y_g \cdot dA = y_g \cdot y_c \, dx$$

siendo y_g la ordenada de su c.d.g., que al ser un rectángulo sería $y_g = \frac{y_c}{2}$, con lo que nos queda

$$dm_x = y_g \cdot y_c \, dx = \frac{y_c}{2} \cdot y_c \, dx = \frac{y_c^2}{2} \cdot dx$$

y el momento estático de toda el área A

$$m_x = \int dm_x = \int_a^b \frac{y_c^2}{2} \, dx$$

o más escuetamente

$$m_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx$$

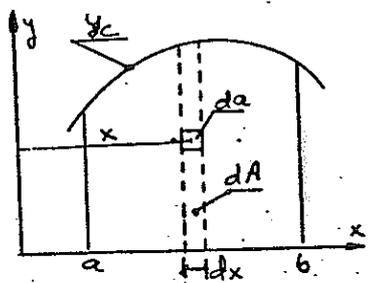
sabiendo ya que 'y' son directamente las ordenadas de la curva 'y_c'.

Como lo normal, según venimos diciendo, es que solamente conozcamos valores discretos de 'y', este será el procedimiento que utilizaremos habitualmente.

Al aplicar el método de Simpson, y teniendo en cuenta que la función integrando es 'y²', nos quedará

$$m_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx \approx \frac{1}{2} x \begin{cases} \frac{h}{3} \sum F_i \cdot y_i^2 \\ \frac{3}{8} h \sum F_i \cdot y_i^2 \end{cases}$$

-Momento estático con relación al eje y



Si consideramos un área A en las mismas condiciones que en el caso anterior, el momento estático con relación al eje 'y' del área más elemental, da = dx dy, será:

$$dm_y = x \cdot da = x \cdot dx \cdot dy$$

y el momento de todo el área A

$$m_y = \int dm_y = \iint x \cdot dx \cdot dy$$

Como venimos diciendo, a nosotros nos interesa integrar primero respecto a 'y', con lo que nos queda

$$m_y = \int_a^b x dx \int_0^{y_c} dy = \int_a^b x \cdot y_c dx$$

Es decir, también podríamos haber considerado un área rectangular dA = y_c dx con lo que directamente nos habría quedado lo mismo

$$m_y = \int x \cdot dA = \int_a^b x \cdot y_c \cdot dx$$

Si sustituimos, igualmente, y_c por y

$$m_y = \int_a^b x \cdot y \cdot dx$$

siendo ya la 'y' las ordenadas de la curva.

Si aplicamos el método de Simpson, y teniendo en cuenta que la función integrando es ahora $x \cdot y$ nos queda:

$$m_y = \int_a^b x \cdot y \cdot dx \approx \begin{cases} \frac{h}{3} \sum F_j \cdot (x_i \cdot y_i) \\ \frac{3}{8} h \sum F_j \cdot (x_i \cdot y_i) \end{cases}$$

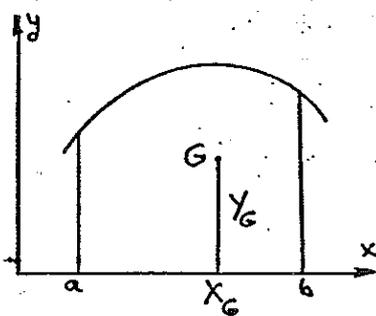
Muchas veces, los términos x_i suelen ser múltiplos naturales del intervalo entre ordenadas h , ($x_i = n_i \cdot h$), por lo que los cálculos resultan más sencillos si sustituimos por las x_i y después sacamos h factor común

$$m_y \approx \frac{h}{3} \sum F_j \cdot x_i \cdot y_i = \frac{h}{3} \sum F_j \cdot (n_i \cdot h) \cdot y_i \rightarrow m_y \approx \frac{h^2}{3} \sum F_j \cdot n_i \cdot y_i$$

Análogamente para la segunda regla

$$m_y \approx \frac{3}{8} h^2 \sum F_j \cdot n_i \cdot y_i$$

Coordenadas del c.d.g. de un área plana



Una vez obtenidos los momentos m_x y m_y de toda el área A , la obtención de las coordenadas $(x_G; y_G)$ de su c.d.g. es inmediata

$$x_G = \frac{m_y}{A} \quad ; \quad y_G = \frac{m_x}{A}$$

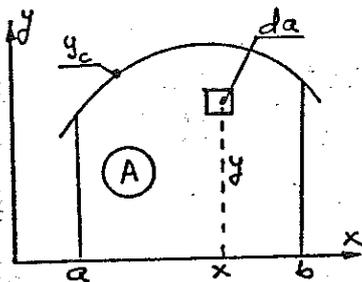
Ahora bien, por un lado por simplicidad de cálculo, para que los números salgan lo más cómodos posible de operar, y, sobre todo, para disminuir lo más posible los errores de redondeo de los decimales, conviene, que antes de hacer las operaciones, se simplifiquen las expresiones al máximo.

Así, en el caso que estamos tratando, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} x_G = \frac{m_y}{A} &\approx \frac{\frac{h^2}{3} \sum F_j \cdot n_i \cdot y_i}{\frac{h}{3} \sum F_j \cdot y_j} \longrightarrow x_G \approx h \frac{\sum F_j \cdot n_i \cdot y_i}{\sum F_j \cdot y_j} \\ y_G = \frac{m_x}{A} &\approx \frac{\frac{1}{2} \frac{h}{3} \sum F_j \cdot y_i^2}{\frac{h}{3} \sum F_j \cdot y_j} \longrightarrow y_G \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum F_j \cdot y_i^2}{\sum F_j \cdot y_j} \end{aligned} \right\}$$

y para los casos en los que debamos aplicar la segunda regla sería totalmente análogo.

- Momento de inercia de un área plana respecto al eje X



Sigamos suponiendo el mismo área A que venimos considerando.

Si consideramos el área más elemental en coordenadas cartesianas, $da = dx \cdot dy$, situada en unas coordenadas cualesquiera (x, y) , por definición, su momento de inercia con relación al eje 'x' será:

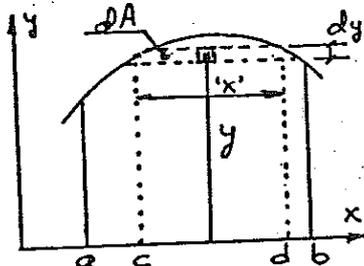
$$dI_x = y^2 da = y^2 dx dy$$

y el momento de todo el área A

$$I_x = \int dI_x = \iint y^2 dx dy$$

Igual que siempre podríamos integrar primero respecto a 'x' y después respecto a 'y', o a la inversa.

a) Integrando primero respecto a 'x' y después respecto a 'y'.



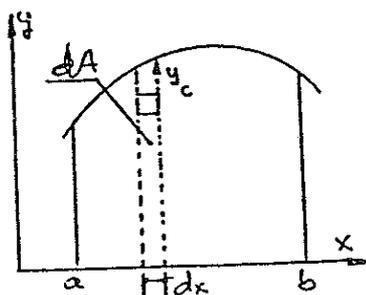
$$I_x = \int_0^{y_{\max}} y^2 dy \int_c^d dx = \int_0^{y_{\max}} y^2 x dy$$

Esto es lo mismo que haber considerado directamente un área elemental $dA = x' dy$, como se hace en la práctica general.

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^{y_{\max}} y^2 x' dy$$

Sin embargo, como lo habitual es que no conozcamos la función $y = f(x)$, ni por tanto $x = f^{-1}(y)$, este procedimiento no nos resultará útil, y en consecuencia utilizaremos el otro procedimiento alternativo.

b) Integrando primero respecto a 'y', y después respecto a 'x'.



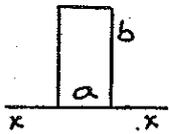
$$I_x = \iint y^2 dx dy = \int_a^b dx \int_0^{y_c} y^2 dy = \int_a^b \frac{y_c^3}{3} dx$$

o simplemente

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx$$

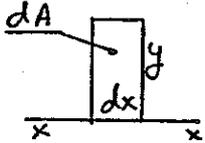
siendo ahora y_i las ordenadas de la curva y_i .

Aunque matemáticamente no tiene mucho sentido, mnemotécnicamente podemos considerar un área elemental $dA = y \cdot dx$ como un rectángulo.



Como ya sabemos, por que se estudió en un tema anterior, el momento de inercia de un rectángulo ($a \times b$) respecto del eje que pasa por su base 'a' era

$$I_x = \frac{1}{3} ab^3$$



En nuestro caso, al ser la base 'a' un dx , nos quedaría

$$dI_x = \frac{1}{3} y^3 dx$$

y por tanto el momento de inercia de todo el área A

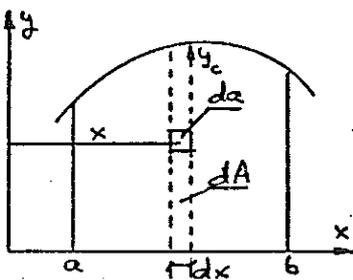
$$I_x = \int dI_x = \int_a^b \frac{1}{3} y^3 dx$$

Si aplicamos ahora el método de Simpson

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx \approx \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{3} \cdot \sum F_i \cdot y_i^3 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{8} \cdot \sum F_i \cdot y_i^3 \end{cases}$$

- Momento de inercia de un área plana con relación al eje 'y'

Si en nuestro área A consideramos el área elemental $da = dx \cdot dy$, su momento de inercia con relación al eje 'y' será, por definición:



$$dI_y = x^2 da = x^2 dx dy$$

y el de todo el área A

$$I_y = \int dI_y = \iint x^2 dx dy$$

Si, por las razones ya sabidas, integramos primero respecto a 'y'

$$I_y = \int_a^b x^2 dx \int_0^{y_c} dy \rightarrow I_y = \int_a^b x^2 \cdot y_c dx$$

A esta misma conclusión habríamos llegado si inicialmente hubiéramos consi-

Considerado un elemento de área $dA = y_c \cdot dx$

$$I_y = \int x^2 \cdot dA = \int_a^b x^2 \cdot y_c \cdot dx \quad , \text{ o ya directamente}$$

$$I_y = \int_a^b x^2 y \, dx$$

Si a esta integral le aplicamos el método de Simpson tendremos

$$I_y = \int_a^b x^2 y \, dx \approx \begin{cases} \frac{h}{3} \sum F_i \cdot x_i^2 \cdot y_i \\ \frac{3}{8} h \sum F_i \cdot x_i^2 \cdot y_i \end{cases}$$

Como ya te comenté al tratar los momentos estáticos, si x_i es un múltiplo sencillo del intervalo entre ordenadas h , ($x_i = n_i \cdot h$), resulta aconsejable sustituir y sacar factor común

$$I_y \approx \frac{h}{3} \sum F_i \cdot (n_i \cdot h)^2 \cdot y_i \quad \rightarrow \quad I_y = \frac{h^3}{3} \sum F_i \cdot n_i^2 \cdot y_i$$

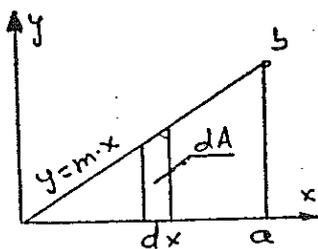
y análogamente para la segunda regla

$$I_y \approx \frac{3}{8} h^3 \sum F_i \cdot n_i^2 \cdot y_i$$

Volvemos a insistir en que el tratamiento de considerar dA como fajas horizontales o verticales es matemáticamente correcto, y por tanto exacto, de única aproximación la hacemos al utilizar el método de Simpson.

Veamos un ejemplo de esto. Vamos a obtener la expresión del momento de inercia de un triángulo rectángulo de lados a y b , respecto del eje x que pasa por uno de los lados.

a) Tomando $dA = y \cdot dx$ (bandas verticales).



$$\left. \begin{aligned} dI_x &= \frac{1}{3} y^3 dx \\ y &= m \cdot x \end{aligned} \right\} \rightarrow dI_x = \frac{m^3 x^3}{3} dx \rightarrow$$

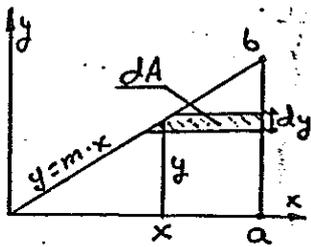
$$I_x = \int dI_x = \int_a^b \frac{m^3}{3} x^3 dx = \frac{m^3}{3} \cdot \frac{a^4}{4}$$

Para expresar el momento de inercia en función de sus catetos 'a' y 'b' sustituimos en la ecuación de la recta

$$y = m \cdot x \rightarrow b = m \cdot a \rightarrow b^3 = m^3 \cdot a^3 \rightarrow$$

$$I_x = \frac{b^3 a}{12}$$

b) Por el método tradicional (bandas horizontales).



$$dI_x = y^2 \cdot dA \quad \text{con } dA = (a - x) \cdot dy \rightarrow$$

$$dI_x = y^2 (a - x) dy$$

Por otro lado, de la función de la curva (recta)

$$y = m \cdot x \rightarrow x = \frac{y}{m}$$

Sustituyendo

$$dI_x = y^2 (a - x) dy = y^2 \left(a - \frac{y}{m} \right) dy \rightarrow$$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^b y^2 \left(a - \frac{y}{m} \right) dy = a \int_0^b y^2 dy - \frac{1}{m} \int_0^b y^3 dy \rightarrow$$

$$I_x = a \cdot \frac{b^3}{3} - \frac{1}{m} \frac{b^4}{4} = b^3 \left[\frac{a}{3} - \frac{b}{m \cdot 4} \right]$$

Tomando de la ecuación de la recta

$$y = m \cdot x \rightarrow b = m \cdot a \rightarrow \frac{b}{m} = a \quad \text{que sustituido nos queda}$$

$$I_x = b^3 \left[\frac{a}{3} - \frac{b}{m \cdot 4} \right] = b^3 \left[\frac{a}{3} - \frac{a}{4} \right] \rightarrow I_x = \frac{b^3 \cdot a}{12}$$

igual que por el procedimiento anterior.

- Cálculo de volúmenes -

Un volumen siempre es un área multiplicada por una distancia perpendicular a ella ($dV = A \cdot dx$). El volumen total de un cuerpo será la "suma" de estos volúmenes elementales.

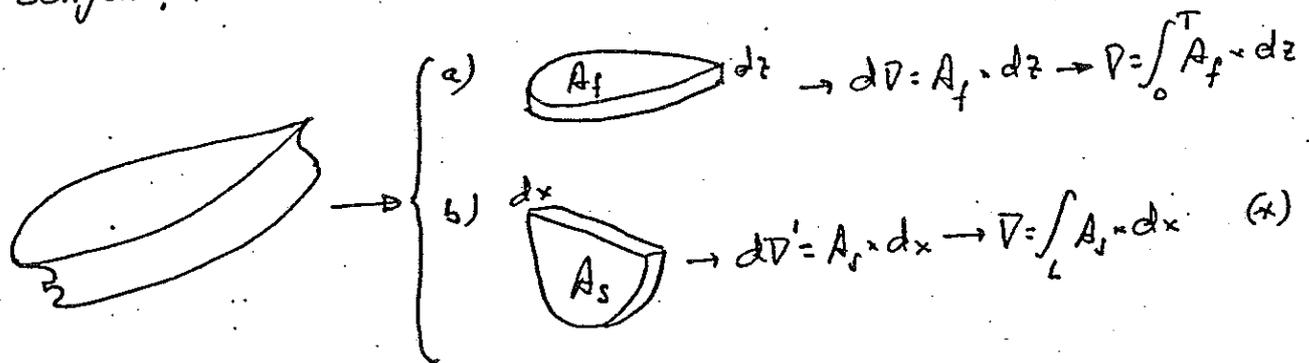
$$V = \int dV = \int_a^b A \cdot dx$$

Desde el punto de vista de las integrales definidas, el volumen es el "área bajo la curva de áreas", por lo que previamente debemos conocer esta función (o por lo menos una serie de valores discretos para poder utilizar el método de Simpson).

El caso más común que se nos va a presentar es el cálculo del volumen de la carena de un buque correspondiente a un determinado calado. Este volumen se representa con el símbolo 'V', y para ello tenemos dos procedimientos:

a) Partir de las áreas horizontales (flotaciones), e integrar a lo largo del eje vertical z . (Este procedimiento es el que se utiliza en los cálculos de las curvas hidrostáticas normales).

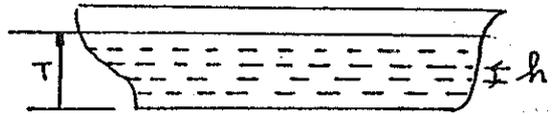
b) Partir de las áreas transversales (secciones), para integrar a lo largo de la eslora (eje x). (En este caso se utilizan los datos obtenidos de las curvas de Bonjean, lo cual se estudiará con detalle en otro capítulo).



y si aplicamos el método de Simpson:

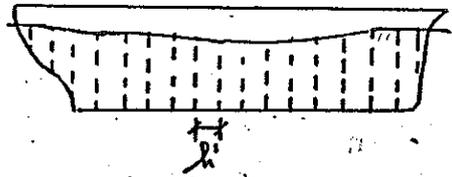
(*) En este caso la integración es a lo largo de la eslora. Dependiendo de dónde tomemos el origen (sección media, perpendicular de popa, etc.) los límites de la integral serán distintos.

$$c) \quad V = \int_0^T A_f \cdot dz \approx \begin{cases} \frac{h}{3} \sum F S_i \cdot A_i \\ 0 \\ \frac{3}{T} h \sum F S_i \cdot A_i \end{cases}$$



siendo h la distancia de referencia entre las líneas de agua.

$$b) \quad V = \int_L A_f \cdot dx \approx \begin{cases} \frac{h'}{3} \sum F S_i \cdot A_i \\ 0 \\ \frac{3}{L} h' \sum F S_i \cdot A_i \end{cases}$$



h' es ahora la clara entre secciones.

Evidentemente, en igualdad de condiciones ambos volúmenes deberán coincidir, aunque si utilizamos el método de Simpson pueden aparecer pequeñas diferencias debidas a la imprecisión del método.

- Cálculo del c.d.p. de volúmenes.

En el caso del buque, al c.d.p. del volumen sumergido se le llame centro de carena (c.d.c.) y lo vamos a representar por 'B'

Suponiendo, como es lo habitual, que el volumen de carena es simétrico respecto al plano diametral, en principio, sólo nos interesarán las otras dos coordenadas:

- Altura u ordenada del c.d.c. (\bar{u}_B)

$$\bar{u}_B = \frac{M_u}{V}$$

Siendo M_u el momento estático de todo el volumen V que estemos considerando respecto al plano base u .

- Posición longitudinal o abscisa del c.d.c. (\bar{x}_B ó X_B)

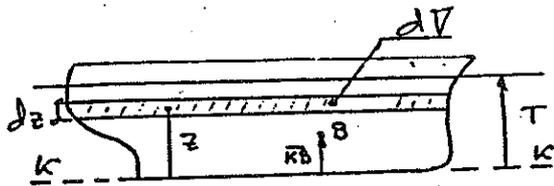
En este caso el origen puede ser la sección media (\bar{x}_B) o la perpendicular de popa (X_B). Mientras no se diga otra cosa, nosotros tomaremos como origen la sección media.

$$\bar{x}_B = \frac{M_x}{V}$$

Siendo ahora M_K el momento estático del volumen V respecto al plano de la sección media K .

Al igual que ocurría en el cálculo del volumen V , tenemos dos posibilidades, dependiendo del tipo de dV que estemos considerando:

a) Considerando flotaciones $\rightarrow dV = A_f \times dz$.



a.1.) $\bar{K}_B =$

$$\bar{K}_B = \frac{M_K}{V}$$

Si consideramos un $dV = A_f \times dz$ genérico, su momento con relación al plano base K será:

$$dM_K = z \times dV = z \times A_f \times dz.$$

Y el momento de todo el volumen

$$M_K = \int dM_K \rightarrow M_K = \int_0^T z \times A_f \times dz.$$

Si aplicamos el método de Simpson

$$M_K \approx \frac{h}{3} \sum FS_i (z_i \times A_{f_i}) \quad \text{ó} \quad M_K \approx \frac{3}{8} h \sum FS_i \cdot (z_i \times A_{f_i})$$

Si además se cumple que $z_i = n_i \times h$, siendo n_i un múltiplo sencillo de h (p. e., 0; 1; 2; etc.), podemos sacar h factor común

$$M_K \approx \frac{h^2}{3} \sum FS_i \cdot n_i \times A_{f_i} \quad \text{ó} \quad M_K \approx \frac{3}{8} h^2 \sum FS_i \cdot n_i \times A_{f_i}$$

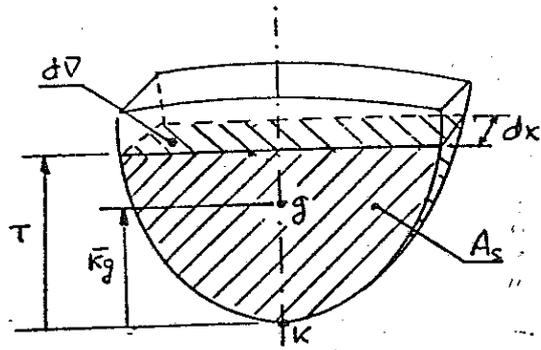
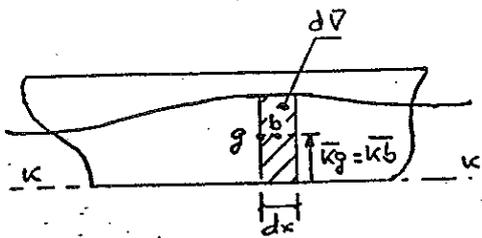
Una vez conocido el valor de M_K para el calado T que estemos considerando, solamente tenemos que dividirlo por el valor de V , previamente calculado, para determinar el \bar{K}_B correspondiente. No obstante, y para ganar precisión obviando los errores de redondeo, se recomienda simplificar las expresiones lo más que razonablemente se pueda; así, si estemos utilizando, por ejemplo, la primera regla de Simpson nos quedará:

$$\bar{K}_B = \frac{M_K}{V} \approx \frac{\frac{h^2}{3} \sum FS_i \cdot n_i \times A_{f_i}}{\frac{h^2}{3} \sum FS_j \times A_{f_j}} \rightarrow \bar{K}_B \approx h \frac{\sum FS_i \cdot n_i \times A_{f_i}}{\sum FS_j \times A_{f_j}}$$

Si utilizáramos la segunda regla sería totalmente análogo.

b) Considerando secciones $\rightarrow dV = A_s \cdot dx$

b.1.) \bar{k}_B



$$\bar{k}_B = \frac{M_k}{V}$$

Aquí también, al ser ahora $dV = A_s \cdot dx$ tenemos el volumen de un prisma recto, en el que la sección A_s es constante en todo el dx . En consecuencia, la altura \bar{k}_g del c.d.g. 'g' del área A_s , del elemento dV genérico, estará a la misma altura que el c.d.g. 'b' de este volumen elemental.

$$\bar{k}_g = \bar{k}_b$$

Así, el momento del dV con respecto al plano base será:

$$dM_k = \bar{k}_b \cdot dV = \bar{k}_g \cdot dV = \bar{k}_g \cdot A_s \cdot dx$$

y el de todo el volumen V

$$M_k = \int dM_k \rightarrow M_k = \int_L \bar{k}_g \cdot A_s \cdot dx$$

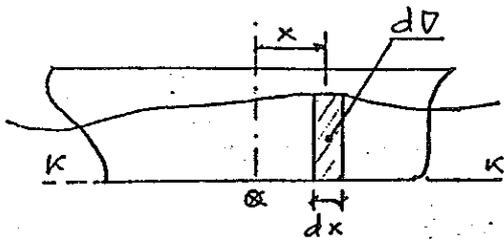
Ahora bien, como el producto $\bar{k}_g \cdot A_s$ es precisamente el momento estático m_k del área de la sección A_s , que estamos considerando, respecto al plano base, nos quedará

$$M_k = \int_L m_k \cdot dx$$

Una vez conocidos M_k y el volumen V , ya podemos calcular \bar{k}_B sin más que dividirlos^(*)

(*) Todo este apartado b) que aquí te da sólo es una introducción para ver cómo se plantean las integrales correspondientes. La aplicación práctica más detallada la veré más adelante en otro capítulo, cuando se estudien las curvas de Bonjean.

6.2.) $\bar{\alpha B}$



$$\bar{\alpha B} = \frac{M_{\alpha}}{V}$$

En este caso el momento del volumen elemental genérico, dV , con respecto a la sección media es:

$$dM_{\alpha} = x \cdot dV = x \cdot A_s \cdot dx$$

y el momento estático de todo el volumen de carena V

$$M_{\alpha} = \int dM_{\alpha} \rightarrow M_{\alpha} = \int x \cdot A_s \cdot dx$$

Si aplicamos el método de Simpson

$$M_{\alpha} \approx \frac{h^3}{3} \sum F_{s_i} \cdot x_i = A_{s_i} \quad \text{ó} \quad M_{\alpha} \approx \frac{3}{8} h^3 \sum F_{s_i} \cdot x_i = A_{s_i}$$

y si, además, se da la circunstancia de que x_i es un múltiplo sencillo de la clara entre secciones, h , tendríamos $x_i = n_i \cdot h$, que substituyendo y sacando factor común h^3 nos quedaría:

$$M_{\alpha} \approx \frac{(h^3)^2}{3} \sum F_{s_i} \cdot n_i = A_{s_i} \quad \text{ó} \quad M_{\alpha} \approx \frac{3}{8} (h^3)^2 \sum F_{s_i} \cdot n_i = A_{s_i}$$

Para obtener la abscisa del c.d.c., una vez conocido el volumen V , sólo tendríamos que dividir

$$\bar{\alpha B} = \frac{M_{\alpha}}{V} \rightarrow \bar{\alpha B} \approx \frac{\frac{(h^3)^2}{3} \sum F_{s_i} \cdot n_i = A_{s_i}}{\frac{h^3}{3} \sum F_{s_i} = A_{s_i}}$$

y si simplificamos

$$\bar{\alpha B} = h \frac{\sum F_{s_i} \cdot n_i = A_{s_i}}{\sum F_{s_i} = A_{s_i}}$$

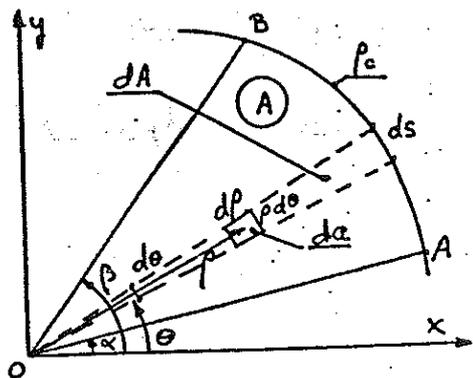
Si en vez de utilizar la primera regla, utilizásemos la segunda sería lo mismo.

- Integración polar con el método de Simpson.

En algunas ocasiones nos van a aparecer ciertas áreas planas con forma de cuña. En estos casos se imponen las coordenadas polares (ρ, θ) .

Vamos, pues, a ver cómo se calculan las áreas de este tipo de figuras y las coordenadas de su c. d. g.

• Cálculo del área:



Consideremos la figura con forma de cuña plana OAB, limitada por la curva $p_c = f(\theta)$, entre los ángulos α y β .

Según venimos diciendo, el primer paso del proceso consiste siempre en obtener la función integrando.

El área más elemental en coordenadas polares es $da = dp \cdot p d\theta$, y por tanto el área

total

$$A = \int da = \iint p \, dp \, d\theta$$

Si integramos primero respecto a p

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{p_c} p \, dp = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{p_c^2}{2} d\theta$$

siendo $p_c = f(\theta)$ la función, que en coordenadas polares, define a la curva \widehat{AB} .

Pero

$$\frac{p_c^2}{2} \cdot d\theta = \frac{1}{2} p_c \cdot p_c d\theta = \frac{1}{2} p_c \cdot ds$$

ya que por ser el ángulo $d\theta$ un infinitésimo arco = ángulo \times radio ($ds = p_c \cdot d\theta$)

Según esto, si considerásemos ya directamente un triángulo elemental de lados p_c y ds , su área sería

$$dA = \frac{1}{2} \cdot p_c \cdot ds = \frac{1}{2} p_c \cdot p_c d\theta = \frac{1}{2} p_c^2 d\theta$$

y nos ahorraríamos una integral.

Si, como en casos anteriores, renombramos p_c como p nos queda:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

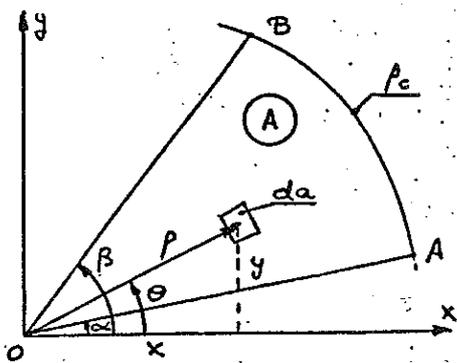
Y si para resolver esta integral aplicamos el método de Simpson, tendremos:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3} \sum_{i=0}^2 f_i^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} h \sum_{i=0}^2 f_i^2 \end{cases}$$

Conviene tener muy presente, que en estos casos la variable independiente, θ , no es una longitud sino un ángulo, por lo cual, al aplicar el método de Simpson, el intervalo entre ordenadas, h , lo tendremos que expresar en la unidad natural de los ángulos, que son los radianes.

El procedimiento de cálculo, por tanto, consistirá en dividir el intervalo angular entre α y β en una serie de subintervalos espaciados angularmente de una manera uniforme ($h = \Delta\theta$), y ver qué ordenada ρ_i corresponde con el extremo de cada uno de ellos.

• Momentos estáticos con relación a los ejes x e y



El momento estático polar del área más elemental, $da = \rho d\theta dr$, con relación al punto O es, por definición

$$dm_o = \rho \cdot da = \rho^2 d\theta dr$$

y el de toda el área A

$$m_o = \int dm_o = \iint \rho^2 d\theta dr$$

Si integramos primero respecto de ρ

$$m_o = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\rho_c} \rho^2 dr \rightarrow m_o = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho_c^3}{3} d\theta = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho_c^3 d\theta$$

Análogamente, el momento estático con relación al eje x del área da

$$dm_x = y \cdot da = y \cdot \rho d\theta dr$$

Teniendo en cuenta que $y = \rho \cdot \text{sen} \theta$, nos queda:

$$dm_x = y \cdot \rho \, d\theta \, d\rho = \rho \text{sen} \theta \cdot \rho \, d\theta \, d\rho \rightarrow dm_x = \rho^2 \text{sen} \theta \, d\theta \, d\rho$$

y el de toda el área A (integrando primero respecto a ρ)

$$m_x = \int dm_x = \iint \rho^2 \text{sen} \theta \, d\theta \, d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \text{sen} \theta \, d\theta \int_0^{\rho_c} \rho^2 \, d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \text{sen} \theta \frac{\rho_c^3}{3} \, d\theta \rightarrow$$

$$m_x = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \cdot \text{sen} \theta \cdot d\theta$$

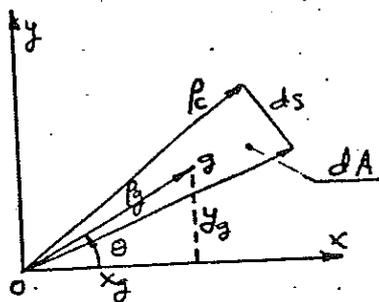
Análogamente, el momento estático con relación al eje y

$$dm_y = x \cdot da \quad \text{con } x = \rho \cdot \text{cos} \theta \quad \text{y } da = \rho \, d\theta \, d\rho \rightarrow$$

$$m_y = \int dm_y = \int x \, da = \iint \rho \text{cos} \theta \cdot \rho \, d\theta \, d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \text{cos} \theta \, d\theta \int_0^{\rho_c} \rho^2 \, d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \text{cos} \theta \frac{\rho_c^3}{3} \, d\theta \rightarrow$$

$$m_y = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \cdot \text{cos} \theta \cdot d\theta$$

Esto mismo lo podríamos haber obtenido si consideramos directamente el triángulo elemental



$$dA = \frac{1}{2} \rho_c \, ds = \frac{1}{2} \rho_c^2 \, d\theta$$

con su c.d.g. situado a $\frac{2}{3}$ del vértice

$$\rho_g = \frac{2}{3} \rho_c$$

Así, el momento polar sería

$$dm_o = \rho_g \cdot dA = \frac{2}{3} \rho_c \cdot \frac{1}{2} \rho_c^2 \, d\theta \rightarrow m_o = \int dm_o = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho_c^3}{3} \, d\theta$$

El momento con relación al eje x

$$dm_x = y_g \cdot dA, \text{ siendo } y_g = \rho_g \cdot \text{sen} \theta = \frac{2}{3} \rho_c \text{sen} \theta \rightarrow$$

$$m_x = \int dm_x = \int y_g \cdot dA = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3} \rho_c \text{sen} \theta \cdot \frac{1}{2} \rho_c^2 \, d\theta \rightarrow m_x = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho_c^3 \cdot \text{sen} \theta \cdot d\theta$$

Y al momento con relación al eje Y

$$dm_y = x_g \cdot dA \quad \text{con} \quad x_g = \rho_g \cdot \cos \theta = \frac{2}{3} \rho_c \cos \theta \quad \text{y} \quad dA = \frac{1}{2} \rho_c^2 d\theta$$

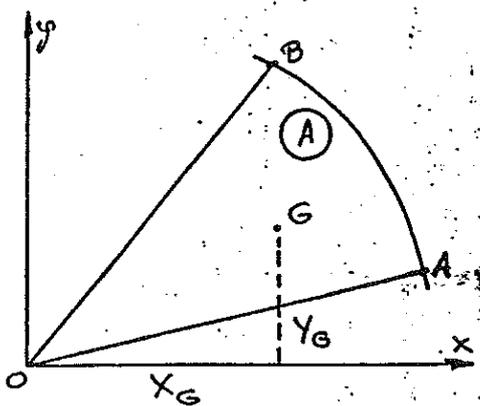
$$m_y = \int dm_y = \int x_g \cdot dA = \int \frac{2}{3} \rho_c \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \rho_c^2 d\theta \rightarrow m_y = \frac{1}{3} \int \rho_c^3 \cos \theta \cdot d\theta$$

En todos los casos lo mismo que antes.

Si para resolver estas integrales aplicamos el método de Simpson

$$\left. \begin{aligned} m_x &\approx \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{3} \sum FS_i \cdot \rho_i^3 \cdot \tan \theta_i \\ m_y &\approx \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{3} \sum FS_i \cdot \rho_i^3 \cdot \cos \theta_i \end{aligned} \right\} \quad ; \quad \left. \begin{aligned} m_x &\approx \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} h \sum FS_i \cdot \rho_i^3 \cdot \tan \theta_i \\ m_y &\approx \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} h \sum FS_i \cdot \rho_i^3 \cdot \cos \theta_i \end{aligned} \right\}$$

• Coordenadas del c.d.g. del área plana ($X_G; Y_G$)



Una vez obtenidos los respectivos momentos estáticos, y conocida el área de toda la curva, podemos determinar las coordenadas de su c.d.g. de la forma habitual

$$X_G = \frac{m_y}{A} \quad ; \quad Y_G = \frac{m_x}{A}$$

Si aplicamos la primera regla de Simpson

$$X_G \approx \frac{\frac{h}{9} \sum FS_i \cdot \rho_i^3 \cdot \cos \theta_i}{\frac{h}{6} \sum FS_i \cdot \rho_i^2} \quad ; \quad Y_G = \frac{\frac{h}{9} \sum FS_i \cdot \rho_i^3 \cdot \tan \theta_i}{\frac{h}{6} \sum FS_i \cdot \rho_i^2}$$

Simplificando

$$X_G \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{\sum FS_i \cdot \rho_i^3 \cdot \cos \theta_i}{\sum FS_i \cdot \rho_i^2} \quad ; \quad Y_G \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{\sum FS_i \cdot \rho_i^3 \cdot \tan \theta_i}{\sum FS_i \cdot \rho_i^2}$$

Si lo que aplicásemos fuese la segunda regla, el proceso sería totalmente análogo.

• Momentos de inercia con relación a los ejes x e y

Momento de inercia con relación al eje x: I_x

Si consideramos el área más elemental en coordenadas polares $da = \rho d\theta d\rho$, por definición, su momento de inercia con relación al eje x es:

$$dI_x = y^2 da \quad \text{con } y = \rho \cdot \text{sen } \theta$$

y el momento de toda el área A

$$I_x = \int dI_x = \int y^2 da = \iint (\rho \cdot \text{sen } \theta)^2 \cdot \rho d\theta d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \text{sen}^2 \theta d\theta \int_0^{\rho_c} \rho^3 d\rho \rightarrow$$

$$I_x = \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \rho_c^4 \text{sen}^2 \theta d\theta$$

Momento con relación al eje y: I_y

Análogamente, el momento de inercia con relación al eje y del área da será

$$dI_y = x^2 da \quad \text{con } x = \rho \cos \theta \quad \text{y } da = \rho d\theta d\rho$$

con lo que el momento total será

$$I_y = \int dI_y = \int x^2 da = \iint (\rho \cos \theta)^2 \cdot \rho d\theta d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\rho_c} \rho^3 d\rho \rightarrow$$

$$I_y = \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \rho_c^4 \cos^2 \theta d\theta$$

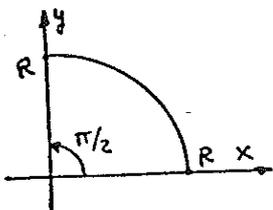
Si como venimos haciendo renombramos ρ_c como ρ tendremos

$$I_x = \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^4 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot d\theta$$

$$I_y = \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^4 \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta$$

Como ejemplo de aplicación vamos a calcular el momento de inercia de un círculo de radio R con relación a un eje x que pase por su centro.

Para un cuadrante será:



$$I_x = \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^4 \cdot \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} R^4 \cdot \sin^2 \theta \cdot d\theta = \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cdot d\theta$$

Para los cuatro cuadrantes

$$I_x = 4 \times \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cdot d\theta = R^4 \left[\left[\frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} [\sin \theta \cdot \cos \theta]_0^{\pi/2} \right] \rightarrow$$

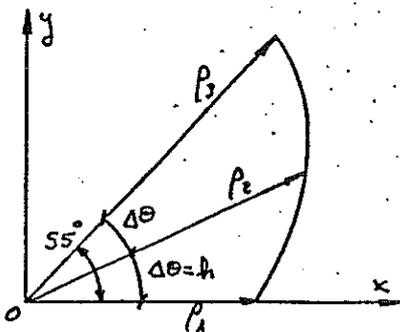
$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

Si para la resolución de las integrales aplicamos la primera regla de Simpson, nos quedaría:

$$I_x \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{3} \sum F_i \cdot \rho_i^4 \cdot \sin^2 \theta_i \quad \text{y} \quad I_y \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{3} \sum F_i \cdot \rho_i^4 \cdot \cos^2 \theta_i$$

Para la segunda regla sería similar.

Ejemplo de aplicación



Sea $\alpha = 0^\circ$ y $\beta = 55^\circ$, y los radios $\rho_1 = 3$; $\rho_2 = 3.5$ y $\rho_3 = 5$ (uniformemente espaciados). Se pide calcular el área, los momentos estáticos, las coordenadas del c.d.p. de la figura y sus momentos de inercia.

Solución:

Al ser tres ordenadas (ρ_i) tendremos que aplicar la primera regla de Simpson.

El intervalo angular será

$$h = \Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{55}{2} = 27,5^\circ \rightarrow h = 27,5 \cdot \frac{\pi}{180} \rightarrow h = 0,480 \text{ radianes}$$

y los distintos valores que nos piden:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3} \sum F_i \cdot \rho_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3} \sum F_i$$

$$m_x = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{3} \cdot \sum F_i \cdot \rho_i^3 \cdot \sin \theta_i = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{3} \sum F_i m_x$$

$$m_y = \frac{1}{3} \int_{\alpha} \rho^3 \cdot \cos \theta \cdot d\theta \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sum FJ_i \cdot \rho_i^3 \cdot \cos \theta_i = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sum Fm_y$$

$$I_x = \frac{1}{4} \int_{\alpha} \rho^4 \cdot \sin^2 \theta \cdot d\theta \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \sum FJ_i \cdot \rho_i^4 \cdot \sin^2 \theta_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \sum FI_x$$

$$I_y = \frac{1}{4} \int_{\alpha} \rho^4 \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \sum FJ_i \cdot \rho_i^4 \cdot \cos^2 \theta_i = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \sum FI_y$$

Ordenando los datos:

θ	ρ	ρ^2	FJ	$FA = FJ \cdot \rho^3$	$\sin \theta$	$Fm_x = FA \cdot \rho \cdot \sin \theta$	$\cos \theta$	$Fm_y = FA \cdot \rho \cdot \cos \theta$	$FI_x = Fm_x \cdot \rho \cdot \sin \theta$	$FI_y = Fm_y \cdot \rho \cdot \cos \theta$
0°	3	9	1	9	0	0	1	27	0	81
$27,5^\circ$	3,5	12,25	4	49	0,462	79,190	0,887	152,122	127,910	472,270
55°	5	25	1	25	0,819	102,394	0,574	71,697	419,381	205,619
TOTALES				83		181,584		250,819	547,362	758,889

$$A \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum FA = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,480}{3} \cdot 83 \rightarrow A = 6,640$$

$$m_x \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sum Fm_x = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,480}{3} \cdot 181,584 \rightarrow m_x = 9,684$$

$$m_y \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sum Fm_y = \frac{1}{3} \cdot \frac{0,480}{3} \cdot 250,819 \rightarrow m_y = 13,376$$

$$I_x \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \sum FI_x = \frac{1}{4} \cdot \frac{0,480}{3} \cdot 547,362 \rightarrow I_x = 21,893$$

$$I_y \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \sum FI_y = \frac{1}{4} \cdot \frac{0,480}{3} \cdot 758,889 \rightarrow I_y = 30,353$$

Las coordenadas del c.d.g. serán:

$$X_G = \frac{m_y}{A} \approx \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sum Fm_y}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum FA} = \frac{2 \cdot 250,819}{3 \cdot 83} \rightarrow X_G = 2,015$$

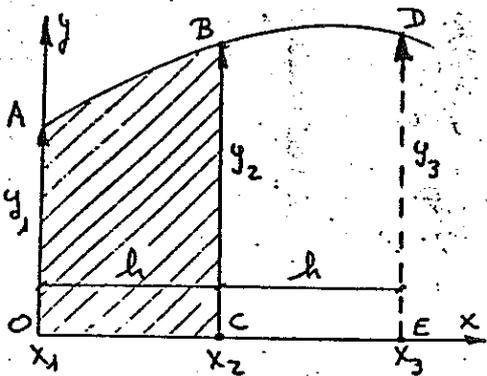
$$Y_G = \frac{m_x}{A} \approx \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sum Fm_x}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum FA} = \frac{2 \cdot 181,584}{3 \cdot 83} \rightarrow Y_G = 1,459$$

Nota.- Aunque la presentación de los datos se ha hecho redondeando a tres cifras decimales, los cálculos se han hecho utilizando todas las decimales con una «hoja de cálculo».

REGLA DE LOS 5-8 PARA CALCULAR ÁREAS Y DE LOS 3-10 PARA MOMENTOS

Estas reglas no son más que una adaptación del método de aproximación parabólica con multiplicadores a un problema particular.

a) La regla 5-8 se utiliza para calcular el área entre dos ordenadas consecutivas de una curva, conociendo otra ordenada adyacente al intervalo y separadas todas ellas una distancia uniforme 'h', es decir:



Supongamos que queremos calcular el área OABC a partir de las tres ordenadas y_1 ; y_2 ; y_3 , separadas entre sí la misma distancia 'h'.

Una primera aproximación podría ser calcular el área como si fuese un trapecio, pero si la curvatura fuese grande se cometería mucho error.

En nuestro caso, lo que hacemos es aproximar la curva ABD a una parábola de segundo orden

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

El área OABC será la integral

$$A = \int_0^h y \cdot dx = \int_0^h (a_0 + a_1x + a_2x^2) dx = \left[a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} \right]_0^h \rightarrow$$

$$A = a_0h + a_1 \frac{h^2}{2} + a_2 \frac{h^3}{3} \rightarrow A = h \left[a_0 + \frac{1}{2} a_1 h + \frac{1}{3} a_2 h^2 \right]$$

Pero por otro lado queremos poder determinar el área de la forma

$$A = h [\tau_1 \cdot y_1 + \tau_2 \cdot y_2 + \tau_3 \cdot y_3]$$

por lo que ambas expresiones deben ser siempre iguales

$$h \left[a_0 + \frac{1}{2} a_1 h + \frac{1}{3} a_2 h^2 \right] = h [\tau_1 \cdot y_1 + \tau_2 \cdot y_2 + \tau_3 \cdot y_3] \quad (1)$$

Para obtener los valores de los coeficientes τ_1 ; τ_2 y τ_3 , en primer lugar particularizamos la función de la curva $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ para cada ordenada.

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 0 &\rightarrow y_1 = a_0 \\ x_2 = h &\rightarrow y_2 = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \\ x_3 = 2h &\rightarrow y_3 = a_0 + 2a_1 h + 4a_2 h^2 \end{aligned} \right\}$$

y después lo sustituimos en la igualdad (1)

$$\left[a_0 + \frac{1}{2} a_1 h + \frac{1}{3} a_2 h^2 \right] = p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 \quad \rightarrow$$

$$a_0 + \frac{1}{2} a_1 h + \frac{1}{3} a_2 h^2 = p_1 a_0 + p_2 (a_0 + a_1 h + a_2 h^2) + p_3 (a_0 + 2a_1 h + 4a_2 h^2)$$

Para que sirva para cualquier curva, esta igualdad tendrá que ser una identidad, es decir, se tendrá que cumplir para cualquier valor de los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 , con lo cual los términos que multiplican a cada uno de ellos, y a cada lado del signo igual, tendrán que ser iguales.

$$\left. \begin{aligned} a_0 &\rightarrow 1 = p_1 + p_2 + p_3 \\ a_1 &\rightarrow \frac{h}{2} = p_2 h + p_3 \cdot 2h \rightarrow \frac{1}{2} = p_2 + 2p_3 \\ a_2 &\rightarrow \frac{h^2}{3} = p_2 h^2 + p_3 4h^2 \rightarrow \frac{1}{3} = p_2 + 4p_3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{5}{12} \\ p_2 &= \frac{8}{12} \\ p_3 &= -\frac{1}{12} \end{aligned} \right\}$$

y sustituymos los en nuestra expresión de área

$$A = h [p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3] = h \left[\frac{5}{12} y_1 + \frac{8}{12} y_2 - \frac{1}{12} y_3 \right]$$

y sacando $\frac{1}{12}$ factor común

$$A = \frac{h}{12} [5y_1 + 8y_2 - y_3]$$

Esta expresión recibe el nombre de 5-8 por los coeficientes de y_1 e y_2 .

Con estas mismas condiciones, y aplicando el mismo razonamiento, podemos obtener el área comprendida entre y_2 e y_3 como

$$A_{2-3} = \frac{h}{12} [-y_1 + 8y_2 + 5y_3]$$

Por otro lado si sumamos las expresiones obtenidas de las áreas entre y_1 e y_2 y la comprendida entre y_2 e y_3 nos queda.

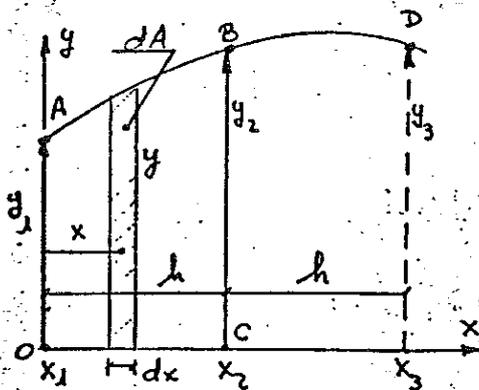
$$A_{1-3} = A_{1-2} + A_{2-3} = \frac{h}{12} [5y_1 + 8y_2 - y_3] + \frac{h}{12} [-y_1 + 8y_2 + 5y_3] \rightarrow$$

$$A_{1-3} = \frac{h}{3} [y_1 + 4y_2 + y_3]$$

Que lógicamente vuelve a ser la primera regla de Simpson.

b) La regla 3-10 sirve para calcular el momento con relación al eje que pasa por y_1 del área comprendida entre las ordenadas y_1 e y_2 , teniendo en cuenta las mismas condiciones y la misma aproximación de la curva.

Si consideramos un diferencial de área genérico de la forma $dA = y \cdot dx$, su momento elemental con relación al eje y será:



$$dm_y = x \cdot dA = x \cdot y \cdot dx$$

Como la curva ABD la aproximamos a la parábola $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, nos queda

$$dm_y = x \cdot y \cdot dx = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) dx \rightarrow$$

$$dm_y = (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3) dx$$

El momento de toda el área OABC será la integral

$$m_y = \int dm_y = \int_0^h (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3) dx = \left[a_0 \frac{x^2}{2} + a_1 \frac{x^3}{3} + a_2 \frac{x^4}{4} \right]_0^h \rightarrow$$

$$m_y = a_0 \frac{h^2}{2} + a_1 \frac{h^3}{3} + a_2 \frac{h^4}{4} \rightarrow m_y = h^2 \left[\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} h + \frac{a_2}{4} h^2 \right]$$

Asimismo, este momento queremos expresarlo de la forma

$$m_y = h^2 [p_1 \cdot y_1 + p_2 \cdot y_2 + p_3 \cdot y_3]$$

Obligando a que las tres ordenadas conocidas cumplen la ecuación de la parábola tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \rightarrow y_1 = a_0 \\ x_2 = h \rightarrow y_2 = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 \\ x_3 = 2h \rightarrow y_3 = a_0 + a_1 2h + a_2 4h^2 \end{array} \right\} \text{ y sustituyendo}$$

$$m_y = h^2 [p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3] = h^2 [p_1 a_0 + p_2 (a_0 + a_1 h + a_2 h^2) + p_3 (a_0 + a_1 2h + a_2 4h^2)]$$

Como ya hemos comentado, si queremos que esto se cumpla para cualquier curva, los términos que multiplican a cada coeficiente, a ambos lados del signo igual, tienen que coincidir

$$\left. \begin{aligned} a_0 &\rightarrow \frac{1}{2} = P_1 + P_2 + P_3 \\ a_1 &\rightarrow \frac{1}{3}h = P_2h + P_3 \cdot 2h \rightarrow \frac{1}{3} = P_2 + 2P_3 \\ a_2 &\rightarrow \frac{1}{4}h^2 = P_2h^2 + P_3 \cdot 4h^2 \rightarrow \frac{1}{4} = P_2 + 4P_3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{3}{24} \\ P_2 &= \frac{10}{24} \\ P_3 &= -\frac{1}{24} \end{aligned} \right\}$$

Sustituyéndolos en nuestra expresión del momento

$$m_y = h^2 [P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3] = h^2 \left[\frac{3}{24} y_1 + \frac{10}{24} y_2 - \frac{1}{24} y_3 \right] \rightarrow$$

$$m_y = \frac{h^2}{24} [3 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 - y_3]$$

Como en el caso anterior del área, esta expresión recibe el nombre de regla 3-10 por los coeficientes de y_1 e y_2 .

TEORÍA DEL BUQUE

CURVAS HIDROSTÁTICAS

GENERALIDADES

Las curvas hidrostáticas no son más que unos diagramas que representan distintas características geométricas del buque, calculadas a partir del plano de formas o de la cartilla de trazado. En un sentido amplio podemos considerar tres grupos o familias de curvas:

- Las curvas hidrostáticas normales o corrientes, también conocidas como carenas rectas. Se entiende que cuando se habla de curvas hidrostáticas, sin especificar más, nos estamos refiriendo a estas.
- Las curvas de Bonjean.
- Las curvas transversales de estabilidad, más conocidas como curvas \overline{KN} o carenas inclinadas. Estas curvas las comentaremos cuando desarrollemos el tema correspondiente.

CURVAS HIDROSTÁTICAS O CARENAS RECTAS

Son unas curvas o diagramas que representan determinados parámetros del buque en función del calado T , con la característica típica de que el calado se pone en el eje de ordenadas. Normalmente son las siguientes:

- 1.- Área de la flotación (A_f).
- 2.- Toneladas por centímetro de inmersión (TCI). En las libras británicas, y sobre todo americanas, lo refieren como toneladas (2240 libras, que equivalen a 1,01605 toneladas métricas) por pulgada (2,54 cm).
- 3.- Abscisa del centro de gravedad (c.d.g.) de la flotación, bien referida a la perpendicular de popa (X_f), o a la sección media (\overline{XF}).
- 4.- Volumen de trazado (V).
- 5.- Desplazamiento de trazado.
- 6.- Desplazamiento total (Δ).
- 7.- Ordenada o altura del centro de carena (c.d.c.) (\overline{KB}).
- 8.- Abscisa del c.d.c. (X_B o \overline{XB}).

- 9.- Radio metacéntrico transversal (\overline{BM} o \overline{BM}_t). A veces los valores del radio metacéntrico se suman a los del \overline{KB} para cada calado y se representa el \overline{KM} ($\overline{KM}_t = \overline{KB} + \overline{BM}_t$).
- 10.- Radio metacéntrico longitudinal (\overline{BM}_l), lo mismo que en el caso anterior, a veces se representa \overline{KM}_l ($\overline{KM}_l = \overline{KB} + \overline{BM}_l$).
- 11.- Momento para alterar el trimado un centímetro (MTC). En las publicaciones inglesas o americanas se suele utilizar su tonelada por pulgada.
- 12.- Coeficientes de forma ($\delta, \beta, \alpha, \psi$).
- 13.- Superficie mojada. Normalmente esta curva es de carácter restringido, y al no tener utilidad práctica para su uso a bordo, las oficinas técnicas no suelen proporcionarla.

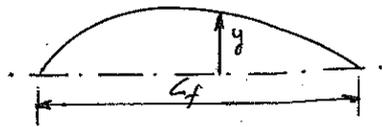
Obviamente, como cada función tiene sus propias unidades, e, incluso, aunque dos funciones distintas se expresen en las mismas unidades (como por ejemplo \overline{BM}_t y \overline{BM}_l) si su rango de variación es muy distinto, cada curva tendrá su propio factor de escala para poder representarla en un diagrama. Para facilitar su lectura se suelen dibujar en papel milimetrado.

A la hora de utilizar las curvas hidrostáticas debemos tener presente dos cosas:

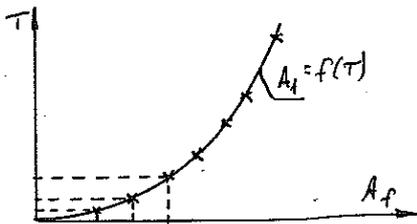
- a) Por un lado están las curvas de la oficina técnica, en las que el calado que se considere es el calado de trazo (referido al canto alto de la quilla), y por otro están las curvas hidrostáticas para uso a bordo, en las que típicamente los calados están referidos al canto bajo de la quilla. Estas últimas se obtienen de las primeras haciéndoles unas pequeñas correcciones.
- b) Las curvas hidrostáticas están calculadas suponiendo el barco adrizado, por lo que si el buque tiene un cierto trimado, en principio, no se podrían utilizar. No obstante, cuando el trimado es pequeño, si entramos con el calado medio ($T_m = \frac{T_{pr} + T_{pp}}{2}$), no se cometen grandes errores. A lo largo del curso iremos comentando las pequeñas correcciones que hay que hacer a las lecturas para obtener valores más precisos en estos casos. Para obviar este inconveniente, en aquellos barcos (por ejemplo pesqueros) en los que presenten variaciones de trimado en las distintas condiciones de navegación, lo que se suele hacer es construir varias curvas hidrostáticas para los ángulos de trimado más representativos.

Curva de áreas de la flotación

Es la curva básica para obtener todas las demás. Para un calado dado, el área de la flotación se obtiene integrando las distintas manpas, o semimanpas, pues lo normal es que la flotación sea simétrica, e lo largo de la eslora en la flotación correspondiente a ese calado.



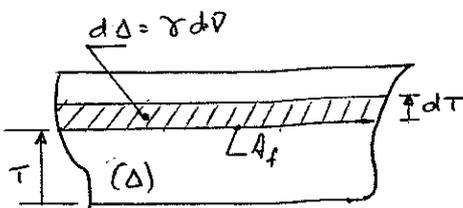
$$A_f = 2 \int_0^{L_f} y dx \quad \text{siendo } y \text{ las semimanpas.}$$



Normalmente estas áreas se calculan para las distintas líneas de agua, empezando por la línea de agua cero, lo que nos da una serie de pares de valores $(T; A_f)$, que al llevarlos al dibujo sobre papel milimetrado nos dará un conjunto de puntos. La curva $A_f = f(T)$

se obtiene trazando la curva que pasa por todos ellos. En la figura se ha trazado una curva que correspondería a un buque con estilla muerta, en el que $A_f = 0$ para $T = 0$.

Toneladas por centímetro de inmersión



Sea un buque al que para un calado T , dado, le corresponde un área de la flotación A_f y un volumen de carena, y, por tanto, un desplazamiento Δ . Supongamos que a partir de

esta situación se le carga un peso que le produzca una variación paralela "infinitesimal" de calado dT . Si el buque estaba en equilibrio, su peso tenía que ser igual a su empuje, es decir, su desplazamiento Δ . Al cargarle el peso, para que siga estando en equilibrio, este peso tendrá que ser compensado con el incremento de empuje $d\Delta$ correspondiente al dT , y tal que

$$d\Delta = \gamma dV = \gamma A_f \cdot dT$$

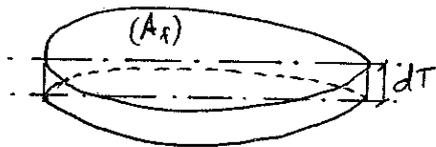
Si, como dT consideremos 1 centímetro ($dT = 1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m}$), entonces $d\Delta$ será igual a las toneladas por centímetro de inmersión (γCI), es decir, las toneladas que es preciso cargar (o descargar) para que ese calado T varíe 1 centímetro.

$$dD = \gamma A_f dT; dT = \frac{1}{100} m \Rightarrow \boxed{TCI = \frac{\gamma A_f}{100}}$$

con γ en t/m^3 y A_f en m^2 .

Desde el punto de vista práctico este concepto se maneja como una simple regla de tres: Si con las TCI correspondientes el calado dado varía 1 cm, cuando carguemos (o descarguemos) un peso p habrá una variación de calado dT .

Según esto las TCI tienen, en realidad, unidades de t/cm , aunque lo habitual es poner simplemente toneladas.



Obviamente debemos ser muy cautos cuando apliquemos este concepto, pues la hipótesis o suposición que estamos haciendo es considerar que el área de la flotación permanece constante en toda

la variación de calado que se produzca. Por tanto las variaciones de calado tendrán que ser forzosamente pequeñas, a no ser que el buque sea del tipo de costados rectos. En caso contrario el error que se comete puede llegar a ser muy grande.

En cuanto a la curva en sí, tanto γ como 100 son constantes, por lo que la curva es esencialmente la misma que $A_f = f(T)$, lo único que cambia es el factor de escala; antes las unidades eran m^2 y ahora son toneladas. De ahí que en muchos casos sólo se represente una de las dos.

Abscisas del c.d.p. de la flotación

Como ya sabemos, la posición del c.d.p. del área de las distintas flotaciones se obtiene dividiendo el momento estático de este área, respecto del origen que estemos considerando, entre el área.

En principio, por comodidad de cálculo, vamos a tomar como origen la sección media

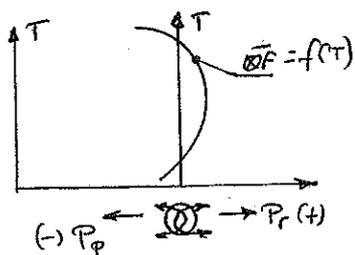
$$\bar{x}_F = \frac{m_s}{A_f}$$

Si consideráramos como origen la perpendicular de popa, el proceso es exactamente el mismo.

Como ya vimos en un tema anterior, en el caso de que las flotaciones sean simétricas

$$m_e = 2 \int_{L_f} x \cdot y \cdot dx \quad \text{y} \quad A_f = 2 \int_{L_f} y \cdot dx$$

siendo y las semimanpas.



Como quiera que estos valores pueden ser positivos o negativos, es decir, a proa o a popa de σ , lo que se suele hacer es poner otro origen arbitrario, marcándolo con el símbolo σ .

Volumen de trazado

El volumen de trazado, correspondiente a cada flotación, es el volumen que se calcula con las lecturas del plano de formas o de la cartilla de trazado. Para ello antes tendremos que calcular la función $A_f = f(T)$

$$V = \int_0^T A_f \cdot dz$$

Como ya vimos este volumen también se podría calcular a partir del área de las secciones para ese calado

$$V = \int_L A_f \cdot dx$$

Curvas de desplazamientos

El desplazamiento (toneladas) se calcula multiplicando el volumen de carena (m^3) por el peso específico supuesto γ (normalmente 1,025 ó 1,026 t/m^3), constante.

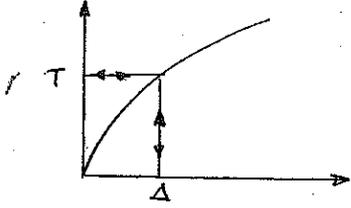
$$\Delta = \gamma \cdot V$$

Por tanto, en esta curva lo que en realidad se representa es la función $V = f(T)$, de ahí que a la función volumen de carena en algunos sitios se le llame desplazamiento en agua dulce.

El volumen de carena, para cada calado, se obtiene como la suma del volumen de trazado (obtenido del plano de formas), más el volumen de los apéndices (planchas del toro, timón, propulsores, etc.) sumerjidos para ese calado.

$$V = \text{vol. de trazado} + \text{vol. apéndices.}$$

Durante las primeras etapas del proyecto, el volumen de los apéndices no se conoce, por lo que hay que estimarlo. Normalmente estará comprendido entre el 0,5% y el 2,5% del volumen de trazado, dependiendo del tipo de buque. En los buques de una hélice es algo menor del 1%. Cuando el proyecto esté más desarrollado, si queremos más precisión tenemos que acudir a los planos de detalle.

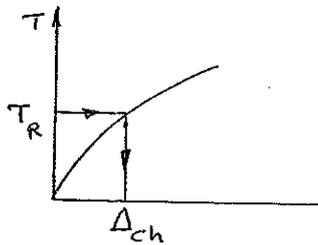


La curva $\Delta = f(T)$ probablemente sea la que más se utiliza de todas. Si tenemos en cuenta que existe una relación biunívoca entre calados y desplazamientos, es decir, a un calado dado le corresponde un único desplazamiento y

recíprocamente, en las curvas hidrostáticas podemos entrar tanto con el calado como con el desplazamiento.

El problema puede surgir cuando el peso específico del agua que se ha supuesto en las curvas hidrostáticas (γ_{ch}), es distinto del peso específico real (γ_R) del agua en la que está flotando el buque. Según esto se nos pueden presentar dos casos:

a) Conocido el calado real (T_R) con el que está flotando el buque, cuál sería el desplazamiento real (Δ_R)



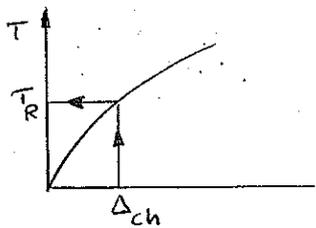
Al entrar con T_R obtenemos el desplazamiento de las curvas hidrostáticas (Δ_{ch}). En realidad, lo que sabemos es que este desplazamiento corresponde a un volumen sumergido

$$V = \frac{\Delta_{ch}}{\gamma_{ch}}$$

que a su vez corresponderá a un desplazamiento real $\Delta_R = V \cdot \gamma_R$, es decir,

$$\Delta_R = \Delta_{ch} \frac{\gamma_R}{\gamma_{ch}}$$

b) El otro caso es: conocido el desplazamiento real (Δ_R) cuál sería el desplazamiento (Δ_{ch}) con el que habría que entrar en las curvas hidrostáticas para obtener el calado real correspondiente (T_R).



Para resolver este caso, sabemos que para Δ_R el buque tiene un volumen sumergido $V = \Delta_R / \gamma_R$, y que a este volumen le corresponde un desplazamiento en las curvas hidrostáticas de

$$\Delta_{ch} = V \cdot \gamma_{cu} \quad \text{y por tanto} \quad \Delta_{ch} = \Delta_R \cdot \frac{\gamma_{cu}}{\gamma_R}$$

Una vez conocido T_R ya podemos obtener el resto de los valores correspondientes a las otras curvas hidrostáticas para Δ_R .

Probablemente, lo más práctico, para no memorizar ninguna fórmula, es tener presente que a cada calado le corresponde un cierto volumen sumergido, y viceversa, aunque este volumen venga "enmascarado" como Δ_{ch} .

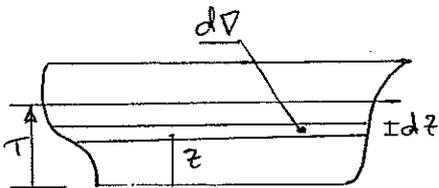
Este mismo tipo de corrección se puede presentar para las curvas TCI y MTC.

Altura del c.d.c. sobre la base

Por definición de c.d.p.

$$\bar{KB} = \frac{M_K}{V}$$

siendo M_K el momento estático del volumen de carena (V) respecto al plano base



Si partimos de áreas de las flotaciones:

$$dV = A_f \cdot dz \quad \text{y} \quad dM_K = dV \cdot z = A_f \cdot dz \cdot z$$

con lo que

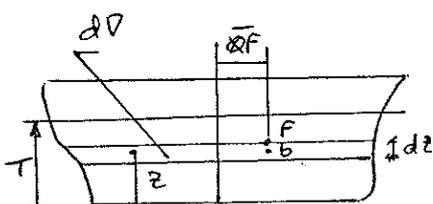
$$M_K = \int_0^T A_f \cdot z \cdot dz \quad \text{y} \quad V = \int_0^T A_f \cdot dz$$

Abcisa del c.d.c.

Si tomamos como referencia la sección media,

$$\bar{\Phi B} = \frac{M_{\Phi}}{V}$$

siendo M_{Φ} el momento estático del volumen de carena respecto a Φ



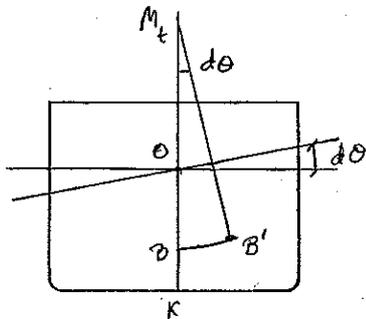
Si partimos también de las áreas de las flotaciones $dV = A_f \cdot dz$, y para un calado z , el momento de este dV era

$$dM_{\Phi} = \Phi_B \cdot dV = \Phi_B \cdot A_f \cdot dz$$

Luego $M_x = \int_0^T \bar{x} F \cdot A_f \cdot dz$ y $V = \int_0^T A_f \cdot dz$.

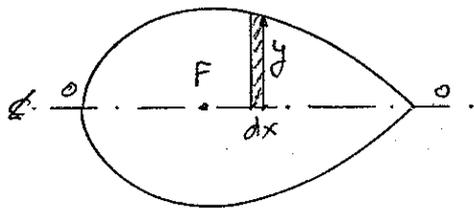
Si el origen lo hubiéramos tomado en la perpendicular de fosa (x_B) el razonamiento sería similar.

Radio metacéntrico transversal



Como ya veremos en el tema próximo, el radio metacéntrico transversal (\overline{BM}_t , o simplemente \overline{BM}) es el radio de curvatura de la curva que describe el c.d.p. al girar el buque un ángulo $d\theta$ infinitesimal en el plano transversal, manteniendo constante el volumen sumergido, y se calcula mediante la expresión

$$\overline{BM}_t = \frac{I_t}{V}$$



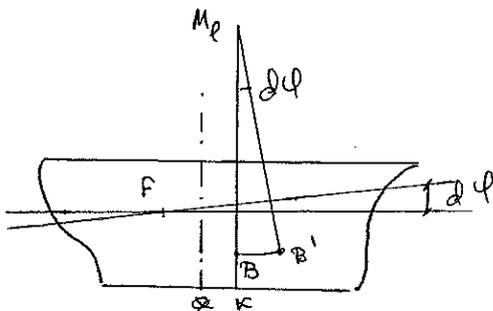
Siendo I_t el momento de inercia del área de la flotación, respecto de un eje OO perpendicular al plano de giro y que pasa por su c.d.p. (F). En nuestro caso, este eje OO coincide con

la línea de cruzía de la flotación (flotaciones simétricas), y por tanto el momento de inercia

$$I_t = 2 \int_{L_f} \frac{1}{3} y^3 dx$$

siendo y las semimanpas.

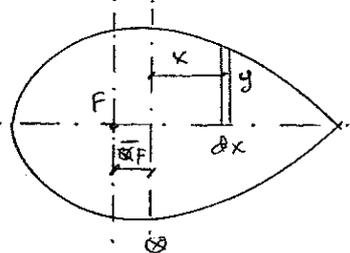
Radio metacéntrico longitudinal



Es lo mismo que en el caso anterior, salvo que ahora el plano de giro es el longitudinal

$$\overline{BM}_e = \frac{I_e}{V}$$

I_e es el momento de inercia del área de la flotación respecto del eje transversal que pasa por su c.d.p. F .



Ahora bien, como quiera que el centro de la flotación F puede estar en cualquier posición, siempre resulta más cómodo calcular primero el momento de inercia respecto del eje paralelo que pasa por la sección media, $I_{\bar{x}}$, y después, aplicando el teorema de Steiner, obtener I_e

$$I_e = I_{\bar{x}} - \bar{x}^2 \cdot A_f$$

Si, como es habitual, la flotación es simétrica

$$I_{\bar{x}} = 2 \int_{L_f} x \cdot y \, dx$$

Si en vez de utilizar la sección media como auxiliar, hubiésemos utilizado la perpendicular de popa, el razonamiento sería el mismo, únicamente que nos saldrán unos números mayores.

En cuanto a los radios metacéntricos, conviene tener presente que el orden de magnitud de los radios metacéntricos transversales es relativamente pequeño, como mucho la decena, mientras que los longitudinales pueden llegar a la centena, o incluso mayores.

En algunos casos, en vez de representar los radios metacéntricos, lo que se dibuja es la distancia del metacentro, transversal o longitudinal, sobre la base. Para ello se suma, para cada calado, la altura del c. d. c. al radio metacéntrico correspondiente.

$$\bar{K}M_t = \bar{K}B + \bar{B}M_t \quad \text{y} \quad \bar{K}M_l = \bar{K}B + \bar{B}M_l$$

Conviene no confundir el concepto de $\bar{K}M$ con el de altura metacéntrica $\bar{G}M$, que se estudiará en el tema siguiente.

Momento para alterar el trimado un centímetro

Es el momento necesario para modificar el trimado del buque (diferencia de calados en las perpendiculares) un centímetro para cada flotación, y se calcula mediante la expresión

$$MTC = \frac{I_e \cdot \delta}{100 \cdot L}$$

siendo I_e , (m^4), el mismo momento de inercia que se utiliza para calcular

$\bar{\rho}_e$, γ el peso específico supuesto para el agua de mar (normalmente 1,025 ó 1,026 t/m³) y L es la eslora, que debería ser entre perpendiculares, en metros.

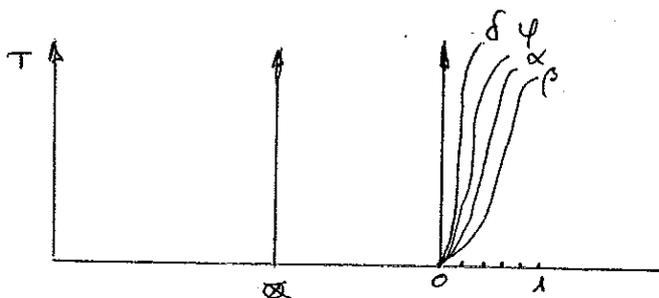
En cuanto a las unidades de los MTC, son t+m/cm, sin embargo, como en el caso de los TCI, sólo se suelen poner las unidades del momento (toneladas x metro).

Todo esto se desarrollará más ampliamente cuando se estudie la "estabilidad longitudinal", únicamente podemos adelantar que es un dato muy importante para conocer los nuevos calados en las perpendiculares cuando se produce una variación de pesos a bordo.

Coefficientes de forma

Estos coeficientes ya los hemos tratado (coeficiente de bloque, de la maestra, de la flotación, etc.) por lo que no los vamos a volver a desarrollar, únicamente puntualizar que en las curvas hidrostáticas los valores que se utilizan (T , V , A_1 , etc.) son los correspondientes a cada calado.

Como lo normal es que estén comprendidos entre 0 y 1, se los suele poner en origen distinto, separados de las demás curvas para que no interfieran.



Superficie mojada

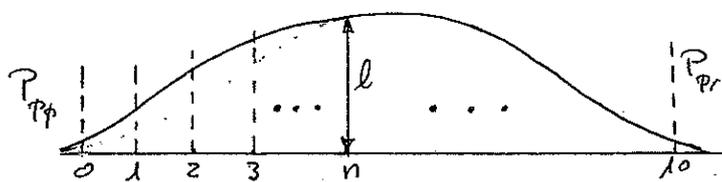
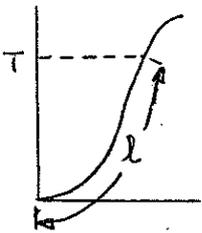
La superficie mojada es el área de la superficie exterior de la carena que esté en contacto con el agua para una flotación determinada, en nuestro caso para cada calado, y se utiliza para calcular la resistencia de fricción del buque durante la marcha.

Su cálculo no es fácil, puesto que la superficie no tiene una función matemática que la defina y además suele presentar una doble curvatura.

lo que hace que no sea desarrollable. De ahí que se utilicen muchas las fórmulas aproximadas que comentaremos más adelante.

Para obtener el valor de la superficie mojada normalmente se hace en dos fases, o sumandos. Primeramente se calcula la superficie exterior correspondiente al volumen de trazado (plano de formas), y después se le suma un incremento por los apéndices.

Para calcular la superficie de trazado correspondiente a un lado T , dado, como la curvatura más importante es la transversal, medimos la longitud de cada sección, o semifección, l , en el plano de formas, por ejemplo con un hilo o de cualquier otra forma.



Los distintos valores de estos desarrollos se lloran sobre una línea base, que representa la espesa, como ordenadas sobre los puntos correspondientes a las secciones. La integral que nos da el área encerrada por esta nueva curva nos aproxima el área de trazado de la superficie mojada (o el semi-área) con un error de un 2%, aproximadamente.

Para conseguir una mayor precisión, a esta curva habría que hacerle otra corrección por la curvatura en el sentido de las líneas de agua, desplazando las secciones.

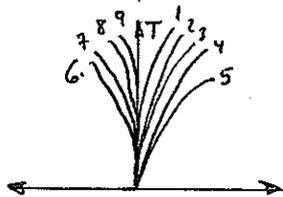
Otro procedimiento, más manual, podría consistir en forrar un modelo a escala con tiras muy estrechas y finas, y después medir la cantidad utilizada en el "forro".

CURVAS DE BONJEAN

En este nuevo grupo de curvas se representan dos tipos de funciones: el área de cada sección de trazoado (A_T) y el momento de cada una de estas áreas respecto del plano base (m_K), ambas en función del calado.

El diagrama con estas curvas puede ser representado de dos formas:

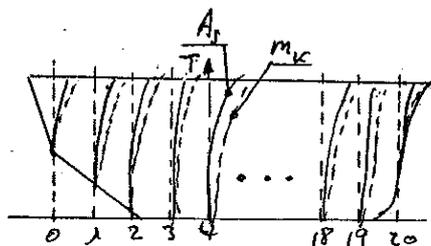
a) En forma de abanico, con el origen y el eje de calados común.



A cada lado de este eje T se representan la mitad de las funciones de área, $A_T = f(T)$ (proa y popa de α), y lo mismo para las funciones momento $m_K = f(T)$. Hoy en día no es frecuente por resultar menos práctico

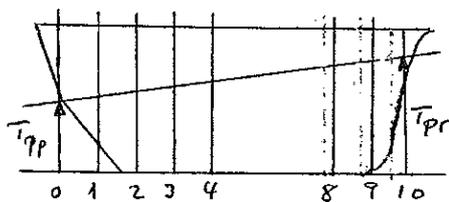
que el otro tipo.

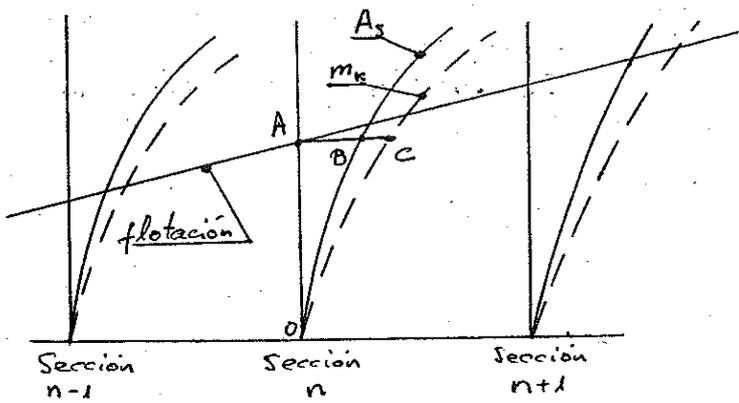
b) Separando las secciones. Sobre papel milimetrado se dibuja un simple esbozo del perfil del buque. Sobre el eje horizontal, que representa el plano o línea base, se levantan las distintas ordenadas, que corresponden a cada sección de trazoado, donde se marca la escala de calados. Sobre cada origen relativo se dibujan la función de áreas y momentos de esa sección.



Las curvas de Bonjean son más flexibles en su utilización que las curvas hidrostáticas corrientes, pues admiten cualquier flotación (plana adrizada, con trimado, o en perfil de ola cualquiera), la única limitación es que no tenga escora. Además el tipo b) de representación tiene la ventaja de que es más fácil visualizar la flotación que estamos calculando. En el caso de que la flotación sea plana, incluso con trimado, si elegimos adecuadamente los factores de escala, solamente necesitamos conocer

los calados en las perpendiculares de proa y popa, pues marcándolos en el diagrama y trazando la recta que los une, su intersección con las ordenadas de las distintas secciones nos va dando sus respectivos calados.



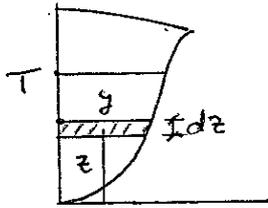


\bar{OA} = calado en la sección n para esa flotación.

\bar{AB} = área de la sección n para el calado \bar{OA} .

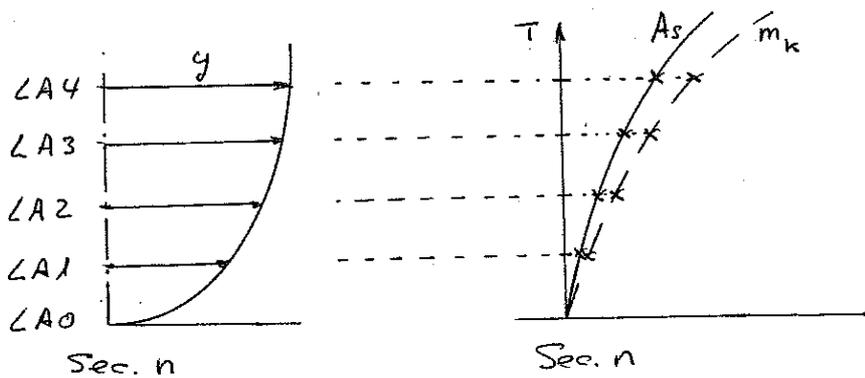
\bar{AC} = momento respecto al plano base del área \bar{OA} de la sección n.

El cálculo de ambas funciones es como ya se comentó. Si suponemos que las secciones son simétricas, y que y son las semimanpas, en metros. Para un calado dado T tendremos un diferencial de área genérico $dA = y \cdot dz$ situado a una altura z sobre el plano base, con lo que



$$A_s = z \int_0^T y \cdot dz \quad \text{y} \quad m_k = z \cdot \int_0^T y \cdot dz \Rightarrow m_k = z \int_0^T y \cdot dz$$

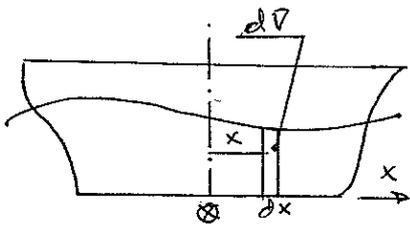
Este cálculo se realiza para los calados correspondientes a cada línea de agua, lo que nos dará sendas familias de puntos. La función se obtiene después trazando la curva que pase por todos ellos.



Como podemos observar las curvas de Boujeau necesitan cuatro factores de escala: el de calados, el de la estora o separación entre secciones (puede ser el mismo que el de calados), el de el área de las secciones y el de los momentos.

La finalidad de estas curvas es poder calcular el volumen de carena y las dos coordenadas (\bar{KB} y \bar{CB} ó X_B) del c.d.c. de cualquier flotación que no tenga escora.

Volumen de carena



Si partimos del área de las secciones: $dV = A_r \cdot dx$

$$V = \int_L A_r \cdot dx$$

Este integral es a lo largo de la eslora sobre el plano base.

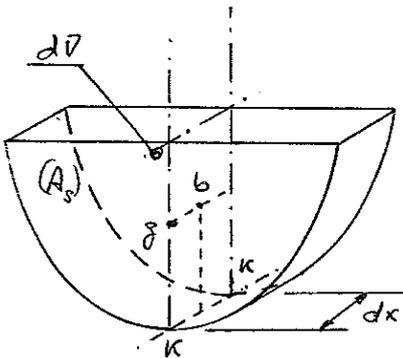
(En realidad lo que calculamos no es el volumen de carena sino el de botado, pues los valores de A_r los hemos hallado con el plano de formas).

Si los valores calculados los multiplicamos por el peso específico obtendríamos los empujes o desplazamientos

$$\Delta = \gamma \cdot V = \int_L A_r \cdot \gamma \cdot dx$$

En este caso a la función $A_r \cdot \gamma = f(x)$ para cada sección se la conoce como curva o función de empujes por unidad de longitud.

Momento del volumen con relación al plano base



En una posición x cualquiera el diferencial de volumen es $dV = A_r \cdot dx$, en el que consideramos que A_r es constante en todo ese dx , es decir, comportándose como un prisma recto de sección constante, y por tanto la altura de su c.d.p., \bar{k}_r , coincidirá con la del c.d.p. del volumen dV : $\bar{k}_r = \bar{k}$

Por otro lado, el momento del volumen dV respecto al plano base, al no tener una repartición uniforme respecto al mismo, valdrá

$$dM_k = \bar{k} \cdot dV = \bar{k}_r \cdot dV = \bar{k}_r \cdot A_r \cdot dx = \frac{m_k}{A_r} \cdot A_r \cdot dx \rightarrow$$

$$M_k = \int_L m_k \cdot dx$$

A modo de resumen podemos concluir que la integral del área de las secciones a lo largo de la eslora nos da el volumen de carena, y que la integral del momento de las secciones, también a lo largo de la eslora, nos da el correspondiente momento del volumen.

Momento del volumen de carena respecto a la sección media

Si consideramos el diferencial de volumen genérico $dV = A_x \cdot dx$, situado a una distancia x , uniforme, respecto al plano de referencia, en este caso la sección media, su momento será

$$dM_{\text{O}} = x \cdot dV = x \cdot A_x \cdot dx$$

y el momento de todo el volumen

$$M_{\text{O}} = \int_L x \cdot A_x \cdot dx$$

Coordenadas del centro de carena

Una vez conocidos los valores V , M_K y M_{O} , de la flotación de que se trate, para obtener la posición de su c. d. c. solamente hay que aplicar la definición de c. d. g.

$$\bar{KB} = \frac{M_K}{V}$$

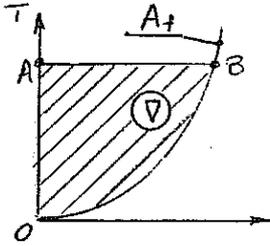
y

$$\bar{OB} = \frac{M_{\text{O}}}{V}$$

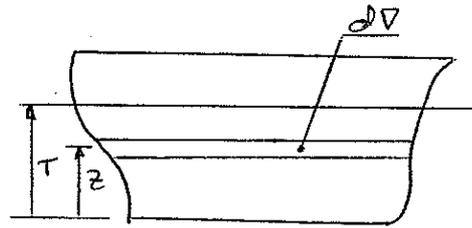
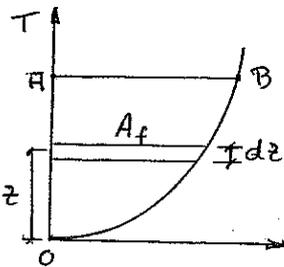
PROPIEDADES DE LAS CURVAS HIDROSTÁTICAS

En todo lo que sigue vamos a hablar únicamente de las curvas hidrostáticas co-rrientes, por tanto el punto de partida es el área de la flotación, A_f , y tomaremos como diferencial de volumen $dV = A_f \cdot dT$ o $dV = A_f \cdot dz$.

Curva de áreas de la flotación



Para un calado dado $T = \overline{OA}$ el "área" encerrada por la curva de áreas de la flotación y el eje de calados (área OAB) es precisamente el volumen de carena del buque para ese calado. En efecto; el diferencial de "área" genérico de la curva

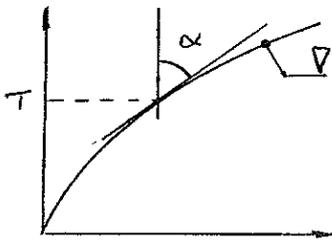


en una posición z cualquiera será d "área" = $A_f \cdot dz$ que coincide con el diferencial de volumen, dV , y por tanto la integral quedará

$$\text{"área" } OAB = \int_0^T A_f \cdot dz = \int_0^T dV = V$$

Curva de volúmenes de carena

a) Área de la flotación



La tangente (derivada) a la curva $V = f(T)$ con la vertical en un punto dado (T dado), es precisamente el área de la flotación para ese calado

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dV}{dT} = \frac{A_f \cdot dT}{dT} = A_f$$

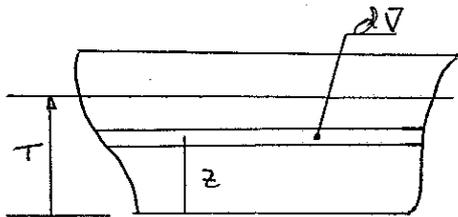
A la hora de interpretar esta propiedad debemos tener presente que, si bien la tangente de un ángulo es adimensional, la derivada es el área de la flotación, que sí que tiene dimensiones (m^2). Esto se traduce

en que el ángulo (en grados) que tenga la tangente, en cada caso particular, dependerá de los factores de escala que hayamos considerado.

b) Ordenada del c. d. c.

Como se sabe, para calcular \bar{KB} debemos dividir el momento estático del volumen de carena respecto al plano base entre este volumen

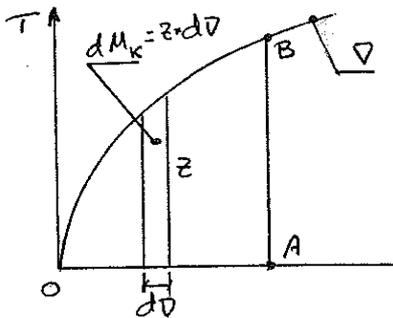
$$\bar{KB} = \frac{M_K}{V}$$



Para calcular M_K consideremos un dV genérico que dará un momento $dM_K = z \cdot dV$, y el momento de todo el volumen

$$M_K = \int dM_K = \int_0^V z \cdot dV$$

Si esto mismo lo llevamos a la curva $V = f(T)$, tenemos que, si para un calado $T = \overline{AB}$, le corresponde un volumen $V = \overline{OA}$, la



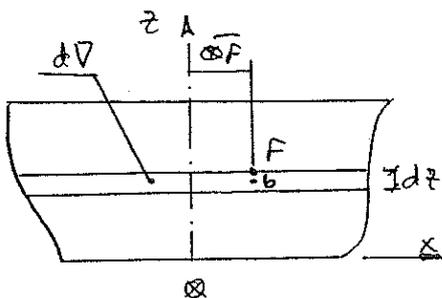
expresión $dM_K = z \cdot dV$ es un diferencial de "área" de la curva, correspondiente a una banda vertical, por lo que la integral de todos estos diferenciales de "área" será precisamente el momento del volumen de carena con relación al plano base, para ese calado; es decir, el "área" $\odot AB$ coincide con M_K

$$\int_0^V z \cdot dV = \text{"área" } \odot AB = M_K$$

Finalmente, como $\bar{KB} = \frac{M_K}{V}$, tendremos

$$\bar{KB} = \frac{\text{"área" } \odot AB}{\overline{OA}}$$

Relación entre las curvas de abscisas \overline{KB} y \overline{KB}



Como siempre

$$\overline{KB} = \frac{M_G}{V}$$

Las variaciones de \overline{KB} con relación al calado

se obtendrán derivando

$$\frac{d\bar{x}_B}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{M_B}{V} \right) = \frac{1}{V^2} \frac{dM_B}{dz} \cdot V - \frac{M_B}{V^2} \frac{dV}{dz}$$

Pero, al ser $dV = A_f \cdot dz$, estamos considerando el área de la flotación constante en el dz , y por tanto el c.d.p. del dV genérico estará en la misma vertical que el centro de la flotación $\bar{x}_B = \bar{x}_F$, y por tanto el momento del dV respecto a la sección medía será $dM_B = dV \cdot \bar{x}_B = dV \cdot \bar{x}_F$.

En resumen

$$dV = A_f \cdot dz$$

$$dM_B = dV \cdot \bar{x}_F$$

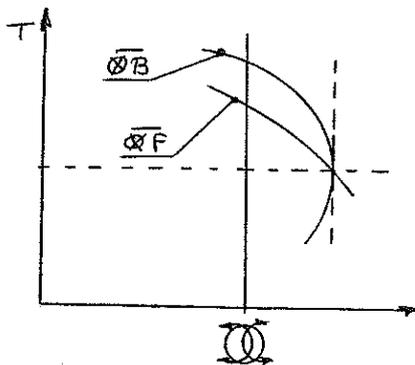
$$M_B = V \cdot \bar{x}_B$$

→ Sustituyendo en la expresión anterior

$$\frac{d\bar{x}_B}{dz} = \frac{1}{V} \frac{dV \cdot \bar{x}_F}{dz} - \frac{V \cdot \bar{x}_B}{V^2} \cdot \frac{A_f \cdot dz}{dz} \rightarrow \frac{d\bar{x}_B}{dz} = \frac{1}{V} \frac{\bar{x}_F \cdot A_f \cdot dz}{dz} - \frac{\bar{x}_B}{V} \cdot A_f \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\bar{x}_B}{dz} = \frac{A_f}{V} [\bar{x}_F - \bar{x}_B]}$$

Conclusión: Si para algún calado las abscisas de ambos centros coinciden,



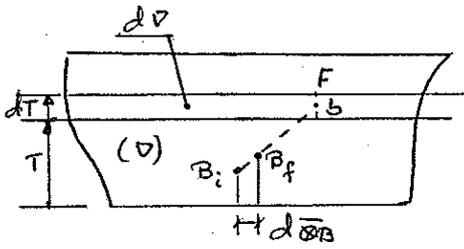
$\bar{x}_F = \bar{x}_B$, la derivada de la curva $\bar{x}_B = f(z)$ en ese punto es igual a cero, $\left(\frac{d\bar{x}_B}{dz} = 0 \right)$, lo que en el diagrama correspondiente repercute en que la tangente a la curva, para ese calado, tendrá que ser vertical.

Oviamente tanto el origen, como el factor de escala, de ambas curvas tendrán que coincidir.

Por otro lado, obsérvese que esta demostración no obliga a que forzadamente tenga que haber algún calado para el que $\bar{x}_F = \bar{x}_B$.

Veamos otra forma de encontrar la relación entre \bar{x}_F y \bar{x}_B .

Partimos de la base, como siempre, de que el c.d.p. del dV esté en la misma vertical que el centro de flotación, $\bar{x}_B = \bar{x}_F$



Supongamos que partiendo de un calado T dado, al que le corresponderá un volumen V , se produce una variación infinitesimal de calado dT . Esto repercutirá en que el volumen aumentará un dV , con su c.d.p. en b , y el c.d.c. se desplazará un $d\bar{x}_B$

Tomando momentos de los volúmenes respecto a la sección media

$$mto. \text{ inicial } \otimes + mto. \text{ añadido } \otimes = mto. \text{ final } \otimes$$

$$V \cdot \bar{x}_B + dV \cdot \bar{x}_F = [\bar{x}_B + d\bar{x}_B] \cdot [V + dV] \rightarrow$$

$$V \cdot \bar{x}_B + dV \cdot \bar{x}_F = \bar{x}_B \cdot V + \bar{x}_B \cdot dV + d\bar{x}_B \cdot V + \underbrace{d\bar{x}_B \cdot dV}_{\approx 0}$$

Como vemos, en esta ecuación el término principal $V \cdot \bar{x}_B$ se autocanula, con lo que nos queda una ecuación de infinitésimos de primer orden, excepto al término $d\bar{x}_B \cdot dV$, que es de segundo orden, y por tanto despreciable.

$$dV \cdot \bar{x}_F = \bar{x}_B \cdot dV + V \cdot d\bar{x}_B \rightarrow \bar{x}_F = \bar{x}_B + V \frac{d\bar{x}_B}{dV} \rightarrow$$

$$\frac{d\bar{x}_B}{dV} = \frac{\bar{x}_F - \bar{x}_B}{V}$$

Para llegar a la misma expresión que habíamos obtenido solamente hay que sustituir $dV = A_f \cdot dz$

$$\frac{d\bar{x}_B}{A_f \cdot dz} = \frac{\bar{x}_F - \bar{x}_B}{V} \rightarrow \frac{d\bar{x}_B}{dz} = A_f \frac{\bar{x}_F - \bar{x}_B}{V}$$

Relación entre \bar{x}_F y \bar{x}_B

Partiendo de la base de que el barco es simétrico y las flotaciones adri-zadas, el c.d.p. de la flotación y del volumen de carena estarán en el eje o el plano de simetría, por tanto

$$\bar{x}_F = \bar{x}_B = 0$$

Relación entre el calado T y \bar{k}_B

Si derivamos la expresión $\bar{k}_B = \frac{M_k}{V}$ con respecto a z tenemos

$$\frac{d\bar{k}_B}{dz} = \frac{1}{V^2} \left[\frac{dM_k}{dz} \cdot V - \frac{dV}{dz} \cdot M_k \right]$$

Por otro lado, como ya hemos visto

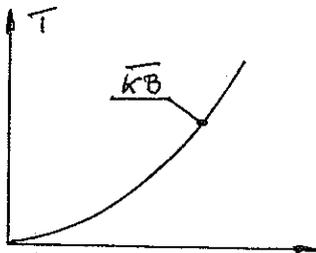
$$\left. \begin{aligned} M_k &= V \cdot \bar{k}_B \\ dV &= A_f \cdot dz \\ dM_k &= z \cdot dV = z \cdot A_f \cdot dz \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Sustituyendo}$$

$$\frac{d\bar{k}_B}{dz} = \frac{1}{V^2} \left[\frac{z \cdot A_f \cdot dz}{dz} \cdot V - \frac{A_f \cdot dz}{dz} \cdot V \cdot \bar{k}_B \right] \rightarrow \frac{d\bar{k}_B}{dz} = \frac{A_f}{V} [z - \bar{k}_B]$$

y para un calado dado $z = T$

$$\boxed{\frac{d\bar{k}_B}{dz} = \frac{A_f}{V} [T - \bar{k}_B]}$$

Conclusión:



Como el calado T siempre va a ser mayor que \bar{k}_B , de la expresión anterior se deduce que $\frac{d\bar{k}_B}{dz} > 0$

Por tanto la curva $\bar{k}_B = f(T)$ siempre será creciente.

Curvas de radios metacéntricos

Los radios metacéntricos, en este caso transversal o longitudinal, siempre se calculan dividiendo un momento de inercia entre el volumen de carena

$$\bar{B}_M = \frac{I}{V}$$

Vamos a ver cómo cabe esperar que varíen.

Supongamos un calado T al que le corresponden unos valores de V y \bar{B}_M dados, y supongamos también que se produce un incremento infinitesimal

mej de calado dT . Esto producirá un aumento del volumen de carena $dV = A_f \cdot dT$

En este dV el área de la flotación A_f es constante y uniforme, por lo que podemos considerar el momento de inercia I constante en todo el dT .

Así tendremos:

$$\text{Para } T \rightarrow \bar{BM}_i = \frac{I}{V} \rightarrow I = \bar{BM}_i \cdot V$$

$$\text{Para } T+dT \rightarrow \bar{BM}_f = \frac{I}{V+dV} = \bar{BM}_i \cdot \frac{V}{V+dV}$$

Como $V < V+dV$ tendremos que $\frac{V}{V+dV} < 1$ y por tanto $\bar{BM}_f < \bar{BM}_i$

Veamos esto mismo por otro procedimiento.

Si como en el caso anterior tenemos un calado T al que le corresponden unos valores V y \bar{BM} dados, y se produce un incremento infinitesimal de calado dT , tendremos una variación del volumen dV , en el que podemos suponer I constante, y por tanto $dI = 0$, y una variación del radio metacéntrico $d\bar{BM}$.

Diferenciando la expresión $\bar{BM} = \frac{I}{V}$ tendremos

$$d\bar{BM} = \frac{1}{V^2} [dI \cdot V - I \cdot dV] \rightarrow d\bar{BM} = -\frac{I \cdot dV}{V^2} = -\frac{I}{V} \frac{dV}{V}$$

como $\bar{BM} = \frac{I}{V}$, al sustituir

$$\boxed{d\bar{BM} = -\bar{BM} \frac{dV}{V}}$$

que como vemos es una variación negativa.

Si lo que queremos es determinar la tangente, o derivada con respecto al calado, sólo tenemos que sustituir $dV = A_f \cdot dT$

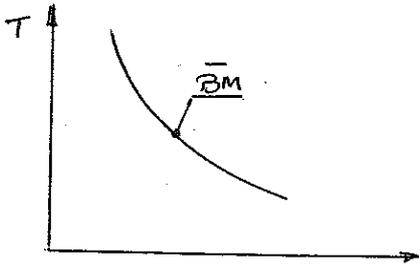
$$d\bar{BM} = -\bar{BM} \frac{dV}{V} = -\bar{BM} \frac{A_f \cdot dT}{V} \rightarrow \boxed{\frac{d\bar{BM}}{dT} = -\bar{BM} \frac{A_f}{V}}$$

A esta misma expresión se llega derivando directamente $\bar{BM} = \frac{I}{V}$

$$\frac{d\bar{BM}}{dT} = \frac{1}{V^2} \left[\frac{dI}{dT} \cdot V - I \frac{dV}{dT} \right] = -\frac{I}{V^2} \frac{A_f \cdot dT}{dT} = -\frac{I}{V} \frac{A_f}{V} \rightarrow$$

$$\frac{d\bar{r}_M}{dz} = -\bar{r}_M \cdot \frac{A}{D}$$

Conclusion:



La curva de radios metacéntricos (transversal o longitudinal) cabe esperar que sea decreciente.

FÓRMULAS APROXIMADAS

INTRODUCCIÓN

Las fórmulas aproximadas son fórmulas que se utilizan para obviar las indefiniciones que tengamos a la hora de resolver algún problema que surja en un momento dado, como, por ejemplo, durante las fases de anteproyecto. Existen fórmulas de este tipo en todos los campos, no solamente en la Teoría del Buque.

A continuación vamos a comentar algunas, si bien a lo largo del curso veremos bastante más. (*)

A la hora de aplicar alguna fórmula aproximada debemos tener presente dos cosas:

- a) Estas fórmulas son más buenas cuanto mayor es el grado de indefinición de los parámetros que les afectan. Por tanto, siempre que se pueda, se debe utilizar un método exacto (aun dentro de la inexactitud con la que se trabaja en Teoría del Buque: interpolaciones, integración aproximada, etc.) antes que una fórmula aproximada.
- b) Las fórmulas aproximadas pueden tener un origen o una base matemática o geométrica, o una base estadística, analizando los datos correspondientes a una serie de buques. Las primeras serán válidas siempre, sin embargo, las segundas, pudiera ocurrir que los buques de los que proceden fuesen estar ya obsoletos.

SUPERFICIE MOJADA

Como ya hemos comentado, la superficie mojada es el área de la superficie exterior de la carena, correspondiente a una flotación dada, que está en contacto con el agua. Como quiera que esta superficie no puede ser desarrollable por tener una doble curvatura: longitudinal y transversal, es por lo que resultan de gran utilidad este tipo de fórmulas. Las más corrientes son:

(*) Para obtener más fórmulas aproximadas se puede consultar el capítulo 4 del libro Resumen de Problemas de Teoría del Buque de don Ceáreo Díaz Fernández.

Normand: $S = L_{pp} [1.5 \cdot T + (0.09 + \delta) \cdot B]$

Denny: $S = 1.7 LT + \frac{V}{T} = LT (1.7 + \frac{B}{T} \delta)$

Taylor: $S = C \sqrt{L \Delta}$ siendo C un coeficiente que se obtiene de un diagrama en función de la relación B/T y el coeficiente de la maestra β .

Canal de Hasler: $S = V^{2/3} \left[3.4 + \frac{L_{pp}}{2 \cdot V^{1/3}} \right]$

Quizás conviene detenernos un poco para ver cómo se obtuvieron las fórmulas de Denny⁽¹⁾ y de Taylor⁽²⁾

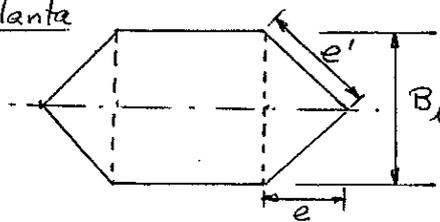
Denny

Parte de las siguientes hipótesis:

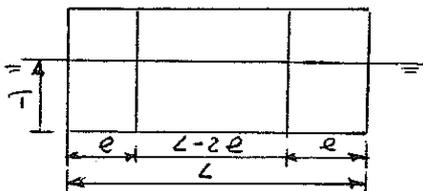
La superficie mojada de un buque es equivalente a la de un cuerpo como el de la figura, que tenga la parte central con forma de prisma recto rectangular y la proa y la popa en forma de cuña, y además:

- La misma eslora y un calado uniforme, iguales a los del buque.
- Una manga máxima B_1 , tal que el área sumergida de su sección media sea también igual a la del buque.
- El volumen sumergido de ambos sea el mismo.

Planta



Alzado



Así tendremos:

El volumen del buque en función del coeficiente de bloque

$$V = \delta L B T$$

y el del cuerpo (formado por la parte central

(1) Denny, A. "A Rapid Method for Calculating Wetted Surfaces", Institution of Naval Architects, 1895.

(2) Taylor, D.W., "The Speed and Power of Ships", Washington, 1933.

más los dos cuñas).

$$V = B_1(L - 2e)T + 2\left(\frac{1}{2}B_1e\right)T \rightarrow V = B_1T(L - e)$$

Iguálándolos

$$\delta LB/T = B_1T(L - e) \rightarrow L - e = \delta L \frac{B}{B_1} \quad \text{y} \quad B_1 = \frac{\delta LB}{L - e}$$

Por otro lado, la superficie mojada del cuerpo (igual a la del buque), estará formada por la superficie de los dos costados verticales de la parte central ($2 \times T(L - 2e)$), más los cuatro costados de las cuñas de proa y popa ($4eT$), y a esto habrá que añadirle la superficie del fondo, que a su vez estará compuesta por el rectángulo central ($B_1(L - 2e)$), más los dos triángulos de los extremos ($2 \times \frac{1}{2}B_1e$). Es decir

$$S = 2T(L - 2e) + 4eT + B_1(L - 2e) + B_1e$$

Si para facilitar los cálculos hacemos $e = e$

$$S = 2T(L - 2e) + 4eT + B_1(L - e) \rightarrow S = 2TL + B_1(L - e)$$

y como $B_1 = \frac{\delta LB}{L - e}$ nos queda $S = 2TL + \frac{\delta LB}{L - e}(L - e) \rightarrow$

$$S = LT\left(2 + \frac{B}{T}\delta\right) \quad \text{ó lo que es lo mismo} \quad S = 2LT + \frac{V}{T}$$

Cuando estas fórmulas se contrastaron con una gran cantidad de buques se comprobó que se ajustaban mejor con un coeficiente 1,7 en lugar de 2, con lo que al final quedó:

$$S = 1,7LT + \frac{V}{T} = LT\left(1,7 + \frac{B}{T}\delta\right)$$

Notas:-

a) Aunque en todo el desarrollo no hemos utilizado la hipótesis de que el área sumergida de la sección media del buque es igual a la del cuerpo, sin embargo es la que hace lógicas a las demás.

La relación entre ambas manjras será

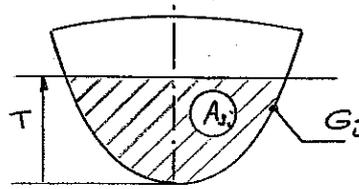
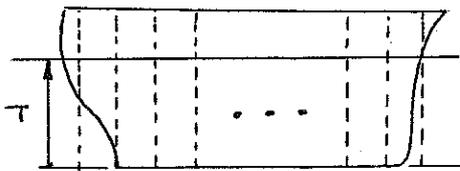
$$A_{\text{R}} = B, T = \beta B T \rightarrow B, = \beta B$$

- b) Los coeficientes α ó $1,7$ son adimensionales, por lo que estas fórmulas se pueden utilizar con unidades inglesas (pies) o métricas.
- c) Estas fórmulas son especialmente adecuadas para buques de velocidad moderada y formas llenas suaves.

Taylor

Consideremos un buque que flota con un determinado calado T . Para ese calado las distintas secciones de trazado a lo largo de la eslora tendrán un área sumergida A_{si} y un contorno o perímetro G_i , de tal forma que para cada una de ellas podemos establecer una relación del tipo

$$G_i = k_i \sqrt{A_{si}}$$



Sec. i

Al considerar el conjunto de todas las secciones podemos determinar sus valores promedio, G y A , de tal forma que podamos poner

$$G = k \sqrt{A}$$

Esto nos permite considerar al buque como un prisma recto en el sentido de la eslora, con una sección uniforme de área A y contorno G , de tal forma que el volumen de carena será $V = A \cdot L$, y el área de la sección promedio $A = V/L$

Asimismo, la superficie mojada del buque

$$S = G \cdot L \rightarrow S = k \sqrt{A} \cdot L = k \sqrt{\frac{V}{L}} \cdot L \rightarrow \boxed{S = k \sqrt{V \cdot L}}$$

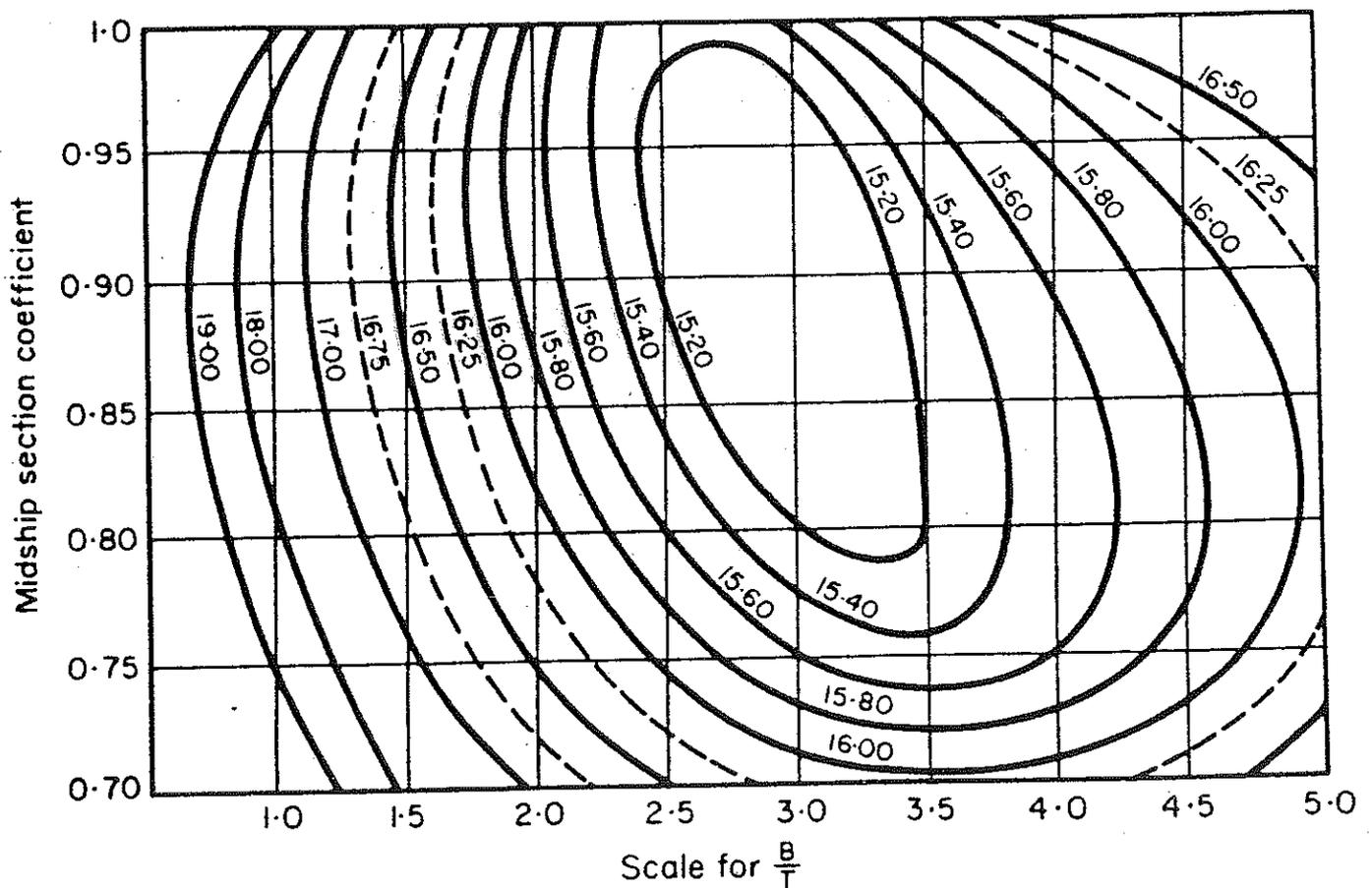
Este coeficiente k se obtiene de un gráfico en función de la relación B/T y del coeficiente de la maestra $\beta = A_{\text{R}}/BT$.

Sin embargo, en la mayoría de las publicaciones, la expresión de la superficie mojada se da en función del desplazamiento en unidades inglesas.

$$S = C\sqrt{\Delta \cdot L}$$

Siendo:

- S la superficie mojada en pies² (1 pie = 0,3048 m).
- Δ desplazamiento para el calado correspondiente en "long tons" (2240 libras, y equivalente a 1016,05 kg).
- L eslora media de las formas sumergidas en pies, que normalmente será algo menor que la eslora en la flotación.
- C es un coeficiente, equivalente al k, que se obtiene del gráfico siguiente en función de B/T y β .



Notas:

- a) Conviene tener presente que el coeficiente que hemos llamado k es adimensional, por lo que la fórmula $S = k\sqrt{\Delta \cdot L}$ se puede usar

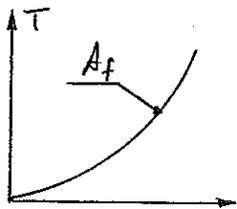
con unidades métricas (m ; m^2 y m^3), mientras que el coeficiente C sí que tiene dimensiones. La relación entre uno y otro es precisamente la raíz cuadrada del peso específico del agua de mar, $\sqrt{\gamma}$. El valor estándar de γ en unidades inglesas es de $64 \text{ lb/ft}^3 = \frac{1}{35} \text{ tonf/ft}^3$, que equivale a $1,025 \text{ t/m}^3$.

b) Aunque esta fórmula la podemos considerar de carácter general, sin embargo está especialmente indicada para buques que tengan un coeficiente de bloque típicamente bajo, como los de guerra o los buques más rápidos.

VOLUMEN DE CARENA

En este caso el planteamiento es el siguiente: Conocido el volumen de carena V_0 para un calado T_0 , estimar el volumen V para otro calado T .

Para ello la hipótesis simplificativa o aproximativa que hacemos es suponer que la curva $A_f = f(T)$ es de la forma



$$A_f = k \cdot T^n$$

siendo k una constante.

Si $dV = A_f \cdot dz$, entonces

$$V = \int dV = \int_0^T A_f \cdot dz = \int_0^T k \cdot z^n \cdot dz \rightarrow V = k \frac{T^{n+1}}{n+1}$$

Por otro lado

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{A_f}{BL} \\ \delta &= \frac{V}{LBT} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\alpha}{\delta} = \frac{A_f / BL}{V / LBT} = \frac{A_f \cdot T}{V} = \frac{kT^n \cdot T}{V} = \frac{kT^{n+1}}{V} = \frac{k \cdot T^{n+1}}{k \frac{T^{n+1}}{n+1}} = n+1$$

Particularizando para nuestro problema

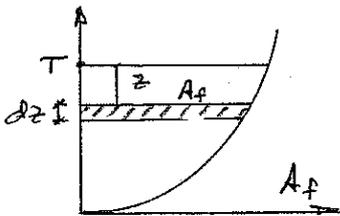
$$\left. \begin{aligned} V_0 &= \frac{k}{n+1} T_0^{n+1} \\ V &= \frac{k}{n+1} T^{n+1} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{V_0}{V} = \frac{\frac{k}{n+1} T_0^{n+1}}{\frac{k}{n+1} T^{n+1}} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{n+1} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{V_0}{V} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\alpha/\delta}}$$

ALTURA DEL CENTRO DE CARENA

Fórmula de Morrish^(*)

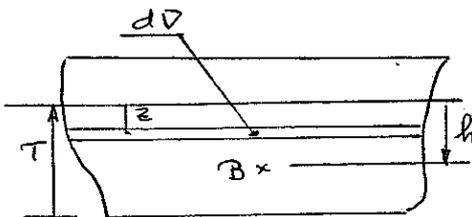
El punto de partida es la curva hidrostática calados - área de la flotación $A_f = f(T)$. Como ya sabemos, para un calado T dado, el área encerrada por esta curva y el eje de calados es precisamente el volumen de carena para ese calado.



$$d\text{"área"} = A_f \cdot dT = dV \rightarrow$$

$$\text{"área"} = \int_0^T A_f \cdot dT = V$$

Pero además el c.d.p. de este "área" está a la misma distancia h de la flotación que el c.d.c. del buque.

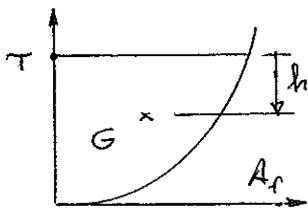


En efecto, en el caso del buque, la distancia h desde la flotación al c.d.c. B será

$$h = \frac{M_f}{V}$$

siendo M_f el momento estático de V respecto al plano de la flotación. Tomando un $dV = A_f \cdot dz$

$$dM_f = z \cdot dV = z \cdot A_f \cdot dz \rightarrow M_f = \int_T^0 z \cdot A_f \cdot dz$$



En el caso del "área" de la curva

$$h = \frac{M_f}{\text{"área"}}$$

Siendo ahora M_f el momento del "área" respecto de la línea horizontal correspondiente al

calado T en la gráfica.

Como siempre, para calcular M_f tomamos un diferencial de "área"

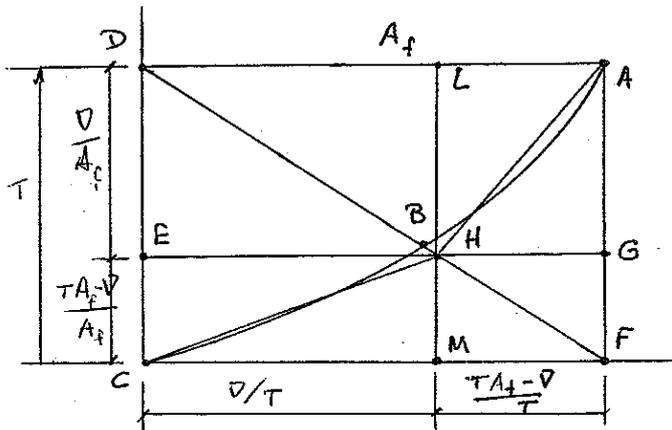
(*) Morrish, S.W.F., "Approximative Rule for the Vertical Position of the Center of Buoyancy". Institution of Naval Architects, 1892.

$$dM_f = z \cdot d\text{"área"} = z \cdot A_f \cdot dz \rightarrow M_f = \int_T^0 z \cdot A_f \cdot dz$$

que coincide con el calculado para el buque, y por tanto

$$h = \frac{M_f}{\text{"área"}} = \frac{M_f}{V}$$

Construcción geométrica:



1º: Partiendo de la curva $A_f = f(T)$, fijamos un calado $T = DC$, al que le corresponderá un área de la flotación $\overline{DA} = A_f$

2º: Por A trazamos la vertical \overline{AF} , y por F la diagonal \overline{DF} , la cual cortará a la curva de áreas de la flotación en algún punto B.

3º: Desde el punto D fijamos arbitrariamente el segmento vertical $\overline{DE} = V/A_f$.

4º: Desde el punto E trazamos la horizontal \overline{EG} , la cual, a su vez, cortará a la diagonal \overline{DF} en algún punto H.

5º: Desde el punto H levantamos la vertical \overline{LM} y trazamos las diagonales \overline{AH} y \overline{HC} .

Áreas:

• Área del rectángulo $\square DAGE = \overline{DA} \times \overline{DE} = A_f \times \frac{V}{A_f} = V$

• Área del rectángulo $\square DLMC = \overline{DL} \times \overline{DC}$, donde:

$$\overline{DC} = T$$

Para determinar $\overline{DL} = \overline{EH} = \overline{CM}$, consideremos los triángulos semejantes

$\triangle DEH$ y $\triangle DCF$, en los que sus lados serán proporcionales

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} \rightarrow \overline{EH} = \overline{DL} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} \times \overline{CF} = \frac{V/A_f}{T} \times A_f \rightarrow \overline{DL} = \frac{V}{T}$$

Luego el área $\square DLMC = \overline{DL} \times \overline{DC} = \frac{V}{T} \times T = V$

- Área de los triángulos $\triangle ALH$ y $\triangle AGH$

$$\text{Área } \triangle AGH = \frac{1}{2} \overline{HG} \cdot \overline{AG}, \text{ siendo:}$$

$$\overline{HG} = \overline{DA} - \overline{DL} = A_f - \frac{D}{T} = \frac{T \cdot A_f - D}{T} \quad \text{y} \quad \overline{AG} = \frac{D}{A_f}, \text{ con lo que}$$

$$\text{Área } \triangle ALH = \text{Área } \triangle AGH = \frac{1}{2} \left(\frac{T \cdot A_f - D}{T} \right) \cdot \frac{D}{A_f} = \frac{1}{2} D \left(1 - \frac{D}{A_f T} \right)$$

- Área de los triángulos $\triangle HEC$ y $\triangle HMC$

$$\text{Área } \triangle HMC = \text{Área } \triangle HEC = \frac{1}{2} \overline{EH} \cdot \overline{EC}$$

$$\overline{EH} = \frac{D}{T} \quad \text{y} \quad \overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = T - \frac{D}{A_f} = \frac{T \cdot A_f - D}{A_f}$$

$$\text{Área } \triangle HMC = \text{Área } \triangle HEC = \frac{1}{2} \frac{D}{T} \cdot \frac{T \cdot A_f - D}{A_f} = \frac{1}{2} D \left(1 - \frac{D}{A_f T} \right)$$

Luego, según esto, los cuatro triángulos tienen el mismo área

$$\text{Área } \triangle HLA = \text{Área } \triangle AGH = \text{Área } \triangle HEC = \text{Área } \triangle HMC = \frac{1}{2} D \left(1 - \frac{D}{A_f T} \right)$$

- Área del polígono $\square DAHC$

$$\text{Área } \square DAHC = \text{Área } \square DAGE - \cancel{\text{Área } \triangle AGH} + \cancel{\text{Área } \triangle HEC} = D$$

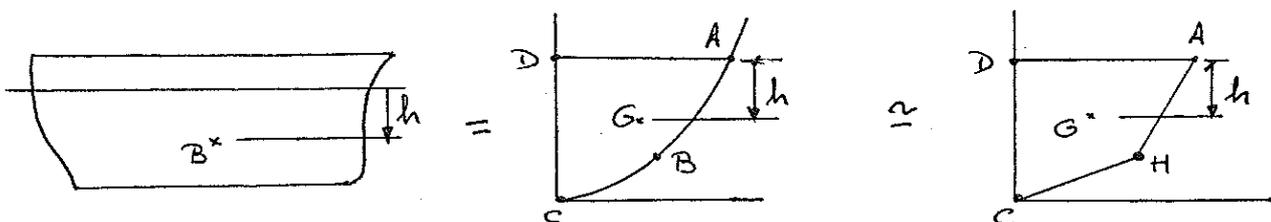
Como resumen podemos concluir:

$$\text{Área } \triangle AGH = \text{Área } \triangle CEH$$

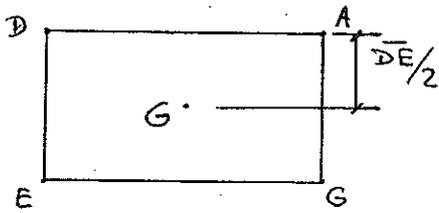
$$\text{Área } \square DAGE = \text{Área } \square DLMC = \text{Área } \square DAHC = \text{Área } \square DABC = D$$

Hipótesis:

La suposición o aproximación que se hace es considerar que el c.d.p. de la poligonal $\square DAHC$, coincide con la de la curva $\square DABC$, la cual, a su vez, coincide con la del c.d.c. del buque, h .



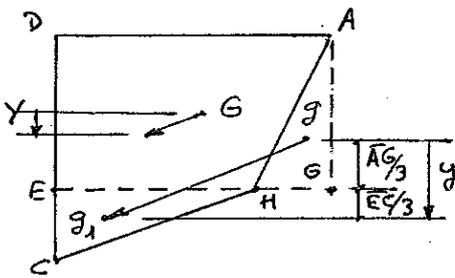
Nuestro objetivo, por tanto, consiste en obtener el valor de h del polígono DAHC



Para ello partimos del rectángulo DAGE, cuyo c.d.p. estará a la mitad de su altura

$$\frac{\overline{DE}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V}{A_f}$$

Posteriormente traslademos el triángulo AGH, con su c.d.p. en g , hasta el triángulo HEC, de igual área, cuyo c.d.p. estará en g_1 .



Considerando solamente la componente vertical del momento de transferencia de las áreas tenemos

$$A_{total} \cdot Y = A_{triángulo} \cdot y$$

$$A_{total} = \text{Área DAGE} = \text{Área DAHC} = V$$

$$A_{triángulo} = \text{Área AGH} = \text{Área HEC} = \frac{1}{2} V \left(1 - \frac{V}{A_f \cdot T}\right)$$

Distancia y

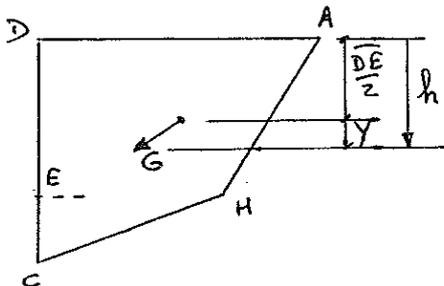
Teniendo en cuenta que el c.d.p. de un triángulo está situado a $1/3$ de su altura, respecto a su base, tendremos

$$y = \frac{1}{3} \overline{AG} + \frac{1}{3} \overline{EC} = \frac{1}{3} \frac{V}{A_f} + \frac{1}{3} \frac{TA_f - V}{A_f} \rightarrow y = \frac{1}{3} T$$

Por tanto

$$Y = \frac{A_{triángulo}}{A_{total}} \cdot y = \frac{\frac{1}{2} V \left(1 - \frac{V}{A_f \cdot T}\right)}{V} \cdot \frac{1}{3} T \rightarrow Y = \frac{1}{6} \left(T - \frac{V}{A_f}\right)$$

Finalmente nos queda obtener h

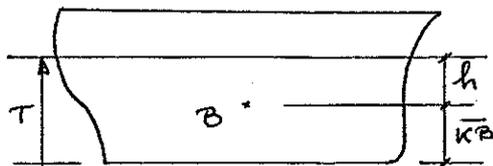


$$h = \frac{\overline{DE}}{2} + Y = \frac{1}{2} \frac{V}{A_f} + \frac{1}{6} \left(T - \frac{V}{A_f}\right)$$

$$h = \frac{3V}{6A_f} + \frac{T}{6} - \frac{V}{6A_f} \rightarrow$$

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{T}{2} + \frac{D}{A_f} \right)$$

Sin embargo, para que esto resulte práctico, es más conveniente expresar esta distancia respecto al plano base



$$\bar{\kappa}_B = T - h = T - \frac{1}{3} \left(\frac{T}{2} + \frac{D}{A_f} \right) \rightarrow$$

$$\bar{\kappa}_B = \frac{5T}{6} - \frac{T}{6} - \frac{D}{3A_f} \rightarrow$$

$$\bar{\kappa}_B = \frac{1}{3} \left[\frac{5T}{2} - \frac{D}{A_f} \right]$$

Esta es la llamada fórmula de Morrish. Si la queremos expresar en función de los coeficientes de forma sólo tenemos que sustituir en ella $D = \delta L B T$ y $A_f = \alpha L B$

$$\bar{\kappa}_B = \frac{1}{3} \left[\frac{5T}{2} - \frac{\delta L B T}{\alpha L B} \right] \rightarrow$$

$$\bar{\kappa}_B = \frac{T}{3} \left[\frac{5}{2} - \frac{\delta}{\alpha} \right]$$

Hay otra fórmula para estimar el $\bar{\kappa}_B$ que da muy buenos resultados y que se ha hecho muy popular, y que es la siguiente

$$\bar{\kappa}_B = T \frac{A_f}{\left(A_f + \frac{D}{T} \right)}$$

Si queremos expresarla en función de los coeficientes de forma sólo tenemos que dividir por $L B$ el numerador y el denominador

$$\bar{\kappa}_B = \frac{\frac{A_f}{L B}}{\frac{A_f}{L B} + \frac{D}{L B T}} \cdot T \rightarrow$$

$$\bar{\kappa}_B = \frac{\alpha}{\alpha + \delta} \cdot T$$

que es la fórmula de Pordunine.

TEORÍA DEL BUQUE

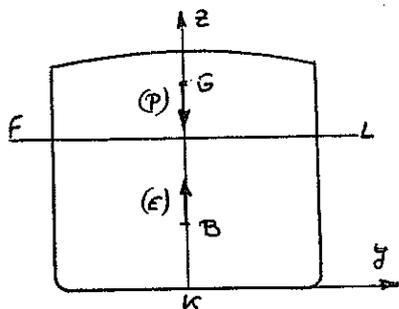
ESTABILIDAD INICIAL

GENERAL.-

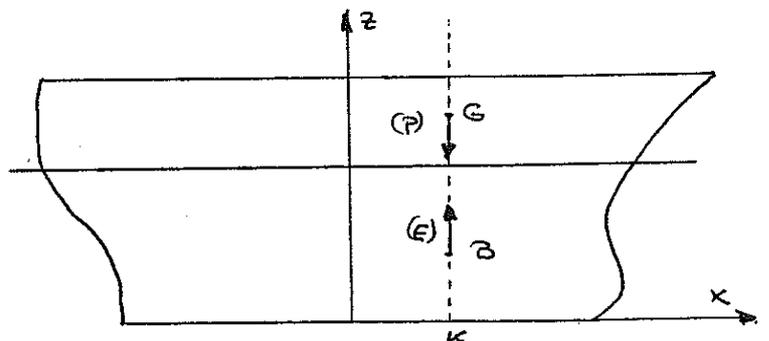
Hipótesis de la Teoría del Buque.-

La Teoría del Buque es un estudio teórico del buque o flotador considerado como un sólido en equilibrio ($\vec{R} = \vec{0}$ y $\vec{M} = \vec{0}$), que se encuentra en reposo y en aguas tranquilas. Por tanto:

- La superficie libre del líquido en el que flota siempre será un plano, y su intersección con las formas del casco (flotación) siempre será un área plana.
- Las únicas fuerzas que actúan, de momento, son: el peso, P , aplicado en el centro de gravedad (c.d.g.) del buque, G , y el empuje, E , aplicado en el centro de gravedad del volumen sumergido o carena, al que se le llama centro de carena (c.d.c.) B . Por tanto no consideraremos las fuerzas de inercia ni las resistencias del agua o del aire.



Plano transversal



Plano longitudinal

En la Física-Mecánica se estudia que el equilibrio de un cuerpo puede ser: estable, inestable o indiferente, según que, si al desplazarse un infinitésimo de su posición de equilibrio, el cuerpo vuelva a su posición inicial, se aleje de ella o simplemente no se mueva, respectivamente.

En nuestro caso, como ambas fuerzas P y E son siempre verticales al plano de la flotación FL , de los 6 posibles grados de libertad del flotador solo nos quedan tres: la traslación vertical y los giros alrededor de los ejes X e Y , ya que los otros tres van a ser intrínsecamente indiferentes.

Equilibrio de traslación sobre el eje z.

Al estar en equilibrio $P = E$. Si se produjese un desplazamiento dz por alguna causa ajena al flotador variaría el volumen sumergido (V) y por tanto el empuje, $E \rightarrow E'$, mientras que el peso no cambia, $P = \text{cte}$.

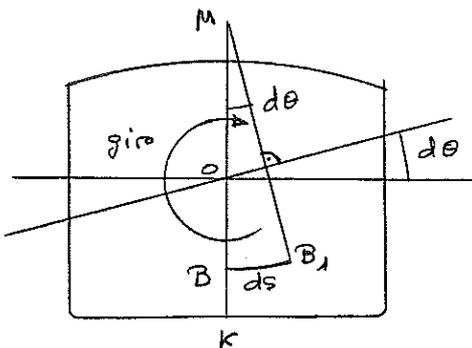
- Si $dz > 0$ aumenta el volumen sumergido $\Rightarrow E' > P \Rightarrow$ el flotador empieza a emerger, disminuyendo V , hasta que $E = P$
- Si $dz < 0$ disminuye el volumen sumergido y por tanto el empuje $\Rightarrow E' < P \Rightarrow$ el flotador se sumergirá hasta que nuevamente $E = P$.

Por tanto, el equilibrio sobre el eje z siempre es estable, haciendo la salvedad de que no pierda la estangueidad y entre agua.

Equilibrio de rotación alrededor del eje X.

En principio, al estudiar el equilibrio del buque por rotación, el flotador puede girar respecto de cualquier eje contenido en un plano XY . Si por alguna causa ajena al mismo se produjese un giro alrededor de uno cualquiera de estos infinitos ejes variara la geometría del volumen sumergido, y por tanto la posición del c.d.c. ($B \rightarrow B_1$), aunque no el valor absoluto de V , puesto que en todo momento se tiene que mantener la igualdad $P = E$.

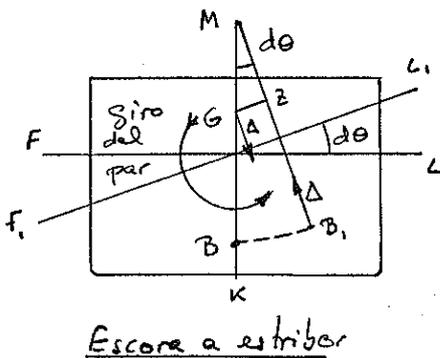
El lugar geométrico formado por todos los posibles puntos ocupados por el c.d.c., considerando todos los ángulos de giro respecto de los infinitos ejes del plano horizontal, será una superficie. Nosotros sólo vamos a estudiar el equilibrio de giro según dos planos principales: transversal (respecto de un eje en el sentido del eje X , que dará los valores de estabilidad mínimos), y longitudinal (eje en el sentido del eje Y , que dará los valores máximos). La intersección de la superficie descrita por los c.d.c. con uno de estos planos nos dará una curva.



Veamos el equilibrio alrededor de un eje paralelo al eje X o equilibrio transversal. Supongamos que por alguna causa ajena al barco se produce un giro (escora) infinitesimal, $d\theta$. La curva descrita por el movimiento del c.d.c. será un

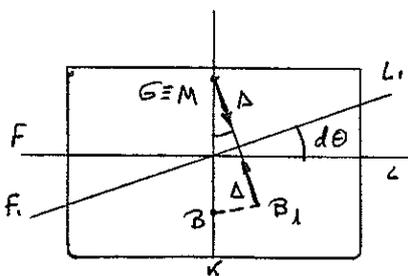
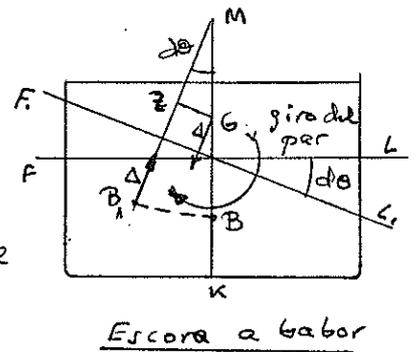
arco infinitesimal, $\overline{BB_1} = ds$, que según se estudia en la Geometría Diferencial tendrá un centro de curvatura, M , llamado metacentro, y un radio de curvatura, \overline{Bm} , llamado radio metacéntrico. Si el plano de corte es transversal, como en este caso, el metacentro y el radio metacéntrico se llaman transversales, mientras que si el plano de corte fuere longitudinal se les llamaría longitudinales.

Una vez producida la escora $d\theta$, que desplaza el c.d.c. desde B hasta B_1 , las líneas de acción del peso y el empuje (siempre perpendiculares a la flotación correspondiente) ya no coinciden \Rightarrow Se produce un par $\Delta \cdot \overline{Gz}$. El sentido de giro debido a este par es el que hace que el equilibrio sea estable, inestable o indiferente.



Equilibrio estable
 $\text{Par} = \Delta \cdot \overline{Gz}$
 En ambos casos su sentido de giro hace que el buque regrese

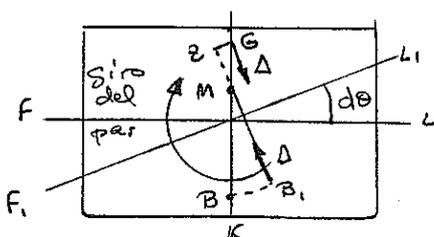
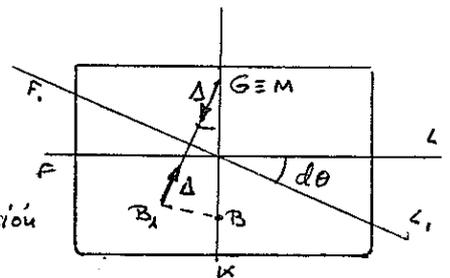
$$\overline{GM} > 0$$



Equilibrio indiferente

$\text{Par} = \Delta \cdot \overline{Gz} = \Delta \cdot 0 = 0$
 Al ser el par nulo el buque no tiene capacidad de reacción

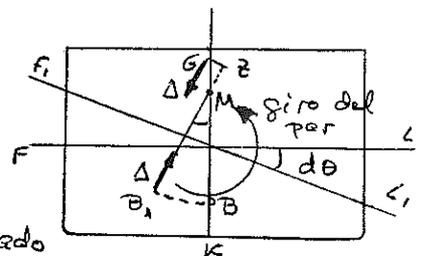
$$\overline{GM} = 0$$

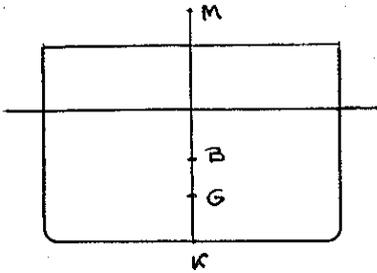


Equilibrio inestable

$\text{Par} = \Delta \cdot \overline{Gz}$
 El sentido de giro en ambos casos hace que el buque se separe de la posición de aditado

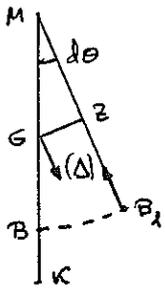
$$\overline{GM} < 0$$





Un caso particular es cuando $\bar{KB} > \bar{KG}$, en el que siempre va a ser estable el buque, si bien esta situación se da muy pocas veces en la práctica.

A cualquier par que tienda a sacar al buque de su posición de equilibrio se le llama par escorante, y el par que le lleva a recuperarla par adrizante (P_a)



$$P_a = \Delta \cdot \bar{GZ} = \Delta \cdot \bar{GM} \cdot \sin(\theta) = \Delta \cdot \bar{GM} \cdot \theta$$

pues al ser el ángulo θ un infinitésimo

$$\theta = \sin(\theta) = \tan(\theta)$$

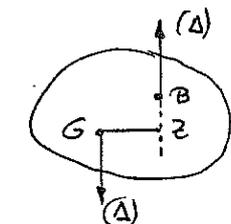
A la distancia \bar{GM} se le llama altura metacéntrica, y es la que nos va a dar el criterio de estabilidad ($\bar{GM} > 0$) en la zona de estabilidad inicial. A su vez podrá ser transversal o longitudinal, según el plano del giro.

El estudio del equilibrio alrededor del eje Y sería totalmente análogo. En este caso, al metacentro, radio metacéntrico y altura metacéntrica se les llama longitudinales, pero distinguirlos de los transversales, que son distintos.

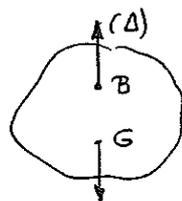
Equilibrio de los cuerpos sumergidos:

En este caso, al estar todo el volumen del cuerpo bajo el agua, la posición relativa del c.d.c., B, no cambia dentro del cuerpo ya que el volumen sumergido permanecerá fijo, tanto en la cantidad como en su geometría.

- Traslación vertical.- Análogamente, equilibrio indiferente.
- Giro.-

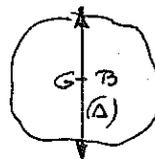


$$P_a = \Delta \cdot \bar{GZ}$$



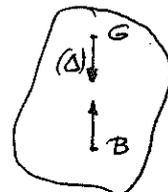
Estable

B "sobre" G



Indiferente

B coincide con G



Inestable

G "sobre" B

ESTABILIDAD. DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN.-

Estabilidad es la tendencia o capacidad del buque para volver a la posición de adrizado. Es sinónimo de "recuperación" ante perturbaciones que den lugar a algún giro alrededor de un eje.

Clasificación:

a) Transversal. Giro alrededor de un eje perpendicular al plano transversal. Cuando no se dice nada se entiende que es transversal; es la más importante porque nos va a dar los pares adrizantes mínimos.

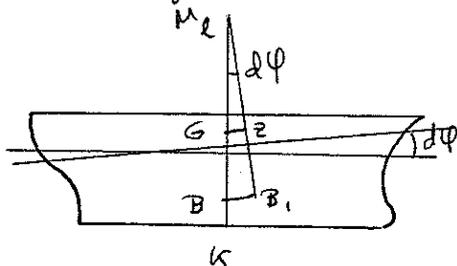
a.1) Estabilidad inicial. Es la estabilidad para pequeños ángulos a partir de la posición de adrizado. La condición es que el metacentro M , lo podamos considerar fijo, con lo que, al ser el ángulo muy pequeño, hacemos la aproximación:

$$\theta \approx \text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta \quad \text{y geoméricamente arco} \approx \text{cuerda} \approx \text{tangente}$$

En la práctica, el ángulo límite de la zona de estabilidad inicial depende del tipo de barco. Con carácter general podríamos decir que $\theta \leq 7^{\circ}$ ó 8° ; si bien en unos puede llegar hasta 10° ó 12° , mientras que en otros puede ser de 2° ó 3° , según sea la curvatura de sus formas.

a.2) Estabilidad a grandes ángulos. A medida que el ángulo de escora va aumentando, y como se puede considerar un infinitésimo, el centro de curvatura, M , de la curva de c.d.c. irá desplazándose, y en general estará fuera del plano diametral. En este caso al centro de curvatura correspondiente a una escora θ , dada, se le llama elore prometacentro. El lugar geométrico formado por todos los metacentros, o prometacentros, al ir variando el ángulo θ , formará una evoluta metacéntrica.

b) Longitudinal. Giro alrededor de un eje perpendicular al plano diametral

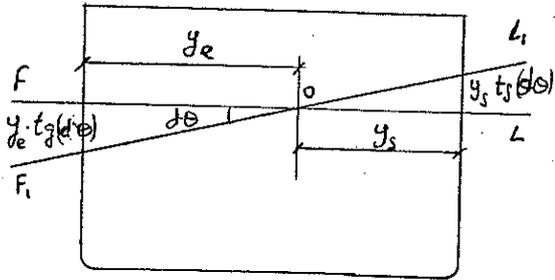


En estabilidad longitudinal, como \overline{BM} siempre tiene unos valores muy grandes, sólo se estudia la estabilidad inicial.

TEOREMA DE EULER. CENTRO DE FLOTACION-

Dada una flotación cualquiera FL, se denomina centro de flotación, y lo vamos a representar por "F", al centro de gravedad correspondiente a su área.

Teorema de Euler.- La línea de intersección de dos flotaciones isocáreas, infinitamente próximas, pasa siempre por el c.d.g., F, de la flotación.

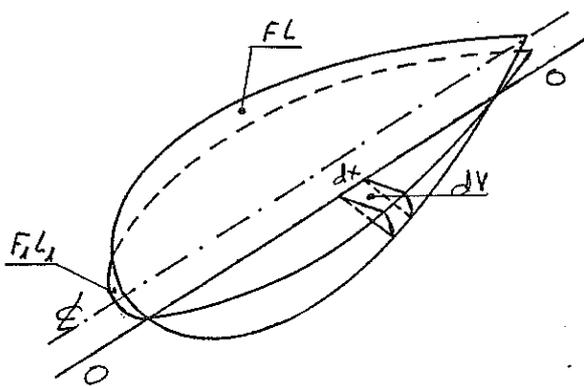


Suponemos que no existen efectos dinámicos, sólo $P_{00} = \text{Empuje}$. Luego si se produjere un giro infinitesimal, $d\theta$, a partir de una flotación cualquiera FL, el volumen de la cuña FOFL₁ que emerge (V_e), tendrá que ser igual al de la cuña L₁OL, que se sumerge (V_s), para que el volumen total

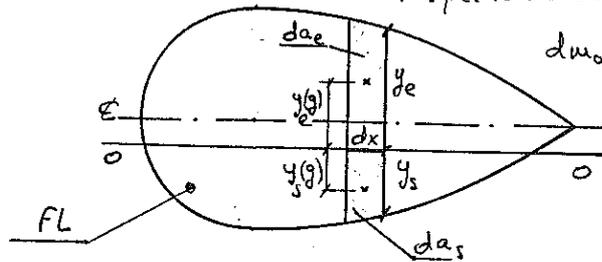
sumergido (V), y por tanto el empuje, no varíe $\rightarrow V_e = V_s = V$

Para la demostración de este teorema lo que se hace es calcular ambos volúmenes mediante el cálculo integral. Al igualarlos y simplificar, nos queda una expresión que representa la igualdad de los momentos estáticos respecto de un eje OO (definido por la intersección del plano de la flotación FL con su infinitamente próxima) del área de la flotación FL que emerge (FO), por un lado, y por otro el momento estático de la parte que se sumerge (OL). Como quiera que ambas áreas no tienen partes comunes (su conjunto intersección es el vacío), la igualdad anterior nos viene a decir que la suma de los momentos estáticos de todo el área de la flotación es nula, y por tanto el eje OO pasa por el c.d.g. del área de la flotación FL.

Veamos este desarrollo aplicado a la estabilidad transversal.



Nota- $y(g) = \frac{1}{2}y$ es la distancia del c.d.g. de cada área. $da = y \cdot dx$ y su momento respecto de OO $\rightarrow dm_o = y(g) \cdot da$

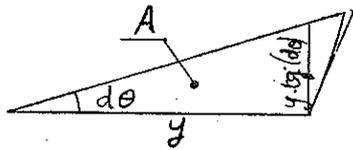


$$dm_o = \left(\frac{1}{2}y\right) \cdot (y dx) = \frac{1}{2}y^2 dx$$

Suponemos un diferencial de volumen (dV) correspondiente a un elemento de longitud dx .

Los volúmenes que emergen y se sumergen serán:

$$\left. \begin{aligned} v_e &= \int_L dv_e = \int_L A_e \cdot dx \\ v_s &= \int_L dv_s = \int_L A_s \cdot dx \end{aligned} \right\} \text{Siendo } A_e \text{ y } A_s \text{ las áreas transversales de ambas cuñas} \\ \text{correspondientes al elemento } dx$$



Por ser $d\theta$ un infinitésimo podemos confundir arco \approx cuerda \approx tangente y el área de la sección transversal la podemos aproximar a un triángulo rectángulo.

$$\left. \begin{aligned} A_e &= \frac{1}{2} y_e \cdot y_e \cdot \tan(d\theta) = \frac{1}{2} y_e^2 d\theta \\ A_s &= \frac{1}{2} y_s \cdot y_s \cdot \tan(d\theta) = \frac{1}{2} y_s^2 d\theta \end{aligned} \right\}$$

También podríamos haber razonado diciendo que al ser $d\theta$ un infinitésimo, en coordenadas polares, $dA = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$

Sustituyendo:

$$\left. \begin{aligned} v_e &= \int_L \frac{1}{2} y_e^2 \cdot d\theta \cdot dx \\ v_s &= \int_L \frac{1}{2} y_s^2 \cdot d\theta \cdot dx \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} v_e &= d\theta \int_L \frac{1}{2} y_e^2 dx \\ v_s &= d\theta \int_L \frac{1}{2} y_s^2 dx \end{aligned} \right\} \text{(por ser } d\theta = \text{cte. en todo } L)$$

Iguando ambos volúmenes. $v_e = v_s \rightarrow$

$$d\theta \int_L \frac{1}{2} y_e^2 dx = d\theta \int_L \frac{1}{2} y_s^2 dx \quad \text{que es la expresión de los momentos estáticos.}$$

$$-\int_L \frac{1}{2} y_e^2 dx + \int_L \frac{1}{2} y_s^2 dx = 0 = m_e + m_s$$

Siendo m_e el momento estático de la parte del aire de la flotación emerge (consideramos nuestro criterio de signos: arriba positivo, abajo negativo)

$$m_e = \int_L dm_e = \int_L -y_e(\xi) \cdot da_e = \int_L \left(-\frac{1}{2} y_e\right) \cdot y_e \cdot dx = -\int_L \frac{1}{2} y_e^2 dx$$

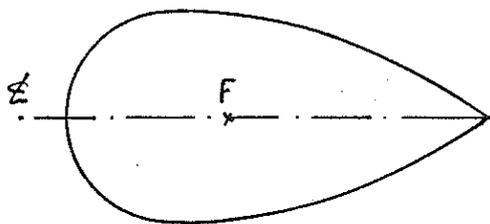
Análogamente, m_s es el momento estático de la parte que se sumerge

$$m_s = \int_L dm_s = \int_L y_s(\eta) \cdot da_s = \int_L \left(\frac{1}{2} y_s\right) \cdot y_s \cdot dx = \int_L \frac{1}{2} y_s^2 dx$$

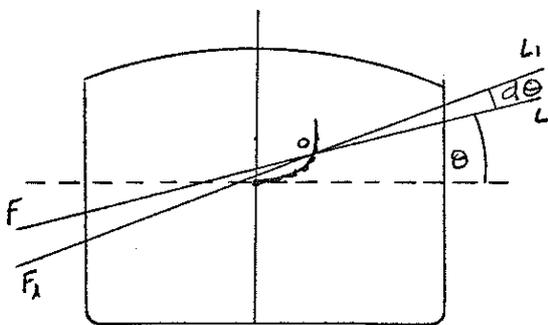
Por tanto, como el momento estático total del área de la flotación FL respecto del eje OO es cero, se deduce: que este eje (obtenido como la intersección de los planos de las flotaciones FL con su infinitamente próxima (L_1)), pasa por su c.d.g. Como queríamos demostrar.

Aunque en este desarrollo hemos supuesto un eje de giro paralelo al eje X , este teorema es de carácter general, y por tanto es válido para:

- Cualquier tipo de giro. No sólo transversal o longitudinal puro, sino respecto de cualquier eje.
- Cualquier flotación con su infinitamente próxima. No sólo la de adrizado.
- Cualquier tipo de flotador: monocasco, catamarán, plataforma "off-shore", etc.



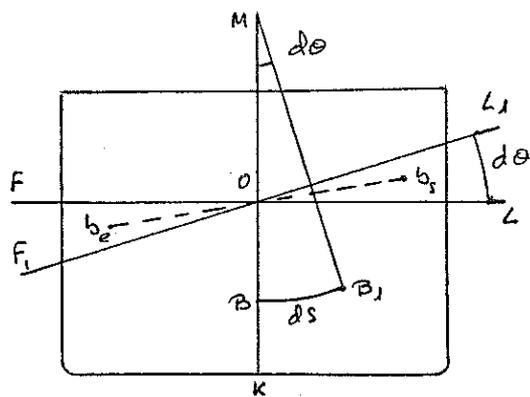
En la situación de adrizado, las flotaciones de los barcos suelen ser simétricas, por tanto el centro de la flotación, F , estará en la línea de central o eje de simetría, y el eje OO coincidirá en el plano diametral, en la línea de cruzía.



A medida que vamos variando el ángulo θ , que define cada flotación FL , desde 0° hasta 180° , manteniendo la condición de que $V = \text{conste}$, la intersección de cada flotación con su infinitamente próxima se irá desplazando, de forma que todos los centros de flotación formarán un lugar geométrico. Si bien su estudio no

suele tener un interés práctico.

RADIO METACÉNTRICO \overline{BM} .



Aunque no es necesario, suponamos que la flotación inicial, FL , es la correspondiente al buque adrizado.

Consideremos que a partir de una flotación inicial FL se produce un giro infinitesimal $d\theta$, pasando a la nueva flotación F_1L_1 , infinitamente próxima, y además se suponen manteniendo las hipótesis previas del teorema de Euler.

a) Momento de transferencia.

Según hemos comentado no existen efectos dinámicos, solo $\text{Peso} = \text{Empuje}$, con lo cual si el volumen de carena no varía su valor, el volumen de la cuña que emerge (FOF_1) tiene que ser igual al volumen de la cuña que se sumerge (L_1OL), es decir, $V_e = V_s = V$

Como este volumen V forma parte del volumen de carena, V , el momento de transferencia de las cuñas tendrá que ser igual al respectivo momento del c.d.c.

$$M_{Cr} = V \cdot \overline{b_2 b_1} = V \cdot \overline{BB_1}$$

Siendo b_2 el c.d.p. del volumen de toda la cuña que emerge y b_1 el de la cuña que se sumerge. Además, los segmentos $\overline{b_2 b_1}$ y $\overline{BB_1}$, tendrán que ser paralelos.

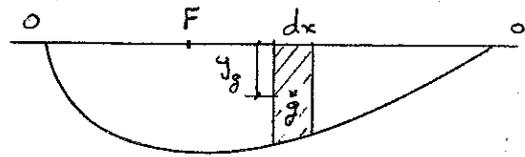
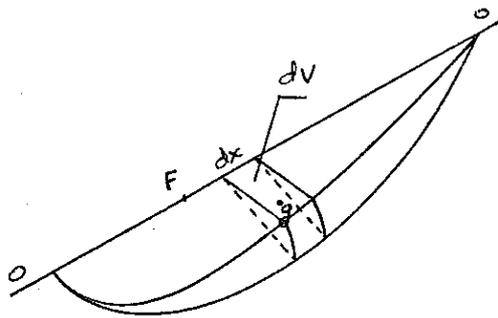
Veamos el momento de transferencia de las cuñas.

$$M_{Cr} = V \cdot \overline{b_2 b_1} = V (\overline{b_2 o} + \overline{o b_1}) = V \cdot \overline{b_2 o} + V \cdot \overline{o b_1} = M_o(e) + M_o(s)$$

Pero $M_o(e) = V \cdot \overline{b_2 o}$ y $M_o(s) = V \cdot \overline{o b_1}$ son los respectivos momentos estáticos de los volúmenes completos de ambas cuñas respecto al eje OO (que según el teorema de Euler es el eje longitudinal que pasa por el centro de la flotación FL).

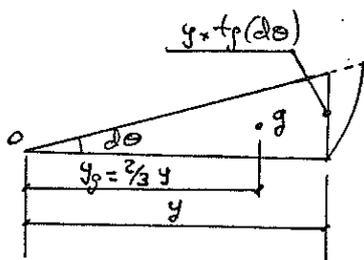
Para calcular tanto $M_o(e)$ como $M_o(s)$ tenemos que considerar un elemento diferencial de volumen, dV , obtener el momento estático que produce dM_o , y después integrar. Al ser el proceso idéntico para ambas cuñas razonamos con una cualquiera de ellas.

Como elemento dV vamos a considerar el correspondiente a un "dx" según el eje OO . ($dV = A \cdot dx$). Sea g el c.d.p. de este dV .



Proyección del dv sobre el plano FL

$$M_o = \int_L dM_o = \int_L y_g g \cdot dv = \int_L y_g \cdot A \cdot dx$$



Como ya se dijo en la pregunta anterior, por ser de un infinitésimo podemos aproximar cada área de sección transversal de este volumen elemental a un triángulo rectángulo

$$A = \frac{1}{2} y \cdot y + f(d\theta) = \frac{1}{2} y^2 d\theta \rightarrow dv = \frac{1}{2} y^2 d\theta \cdot dx$$

Ahora bien, el c.d.p. g del dv tendrá la misma separación respecto del eje oo que el c.d.p. de su sección transversal, es decir: $y_g = \frac{2}{3} y$ por ser un triángulo.

Sustituyendo

$$dM_o = y_g dv = \frac{2}{3} y \cdot \frac{1}{2} y^2 d\theta dx = \frac{1}{3} y^3 d\theta dx \Rightarrow M_o = \int_L \frac{1}{3} y^3 d\theta dx = d\theta \int_L \frac{1}{3} y^3 dx$$

ya que al ser $d\theta$ constante a lo largo de la altura L , lo podemos sacar de la integral.

Por otro lado $\int_L \frac{1}{3} y^3 dx$ es la expresión del momento de inercia de la parte correspondiente de cada semi-área de FL respecto del eje oo , con lo que nos queda

$$M_o = d\theta \int_L \frac{1}{3} y^3 dx = d\theta \cdot I$$

Aplicándolo a cada cuña

$$\left. \begin{array}{l} M_o(e) = I_e \cdot d\theta \\ M_o(s) = I_s \cdot d\theta \end{array} \right\} \rightarrow M_{tr} = M_o(e) + M_o(s) = I_e \cdot d\theta + I_s \cdot d\theta = (I_e + I_s) \cdot d\theta = I_c \cdot d\theta$$

Por tanto el momento de transferencia de las cuñas nos queda

$$M_{tr} = v \cdot \overline{b_e b_s} = I_c \cdot d\theta$$

siendo I_c el momento de inercia de toda el área de la flotación F respecto del eje oo que pasa por su centro de flotación F

siguiendo con nuestro razonamiento, sustituyendo esta expresión en la igualdad de los momentos de transferencia nos queda:

$$M_G = U \cdot \overline{b_2 b_1} = V \cdot \overline{BB_1} \rightarrow I_c \cdot d\theta = V \cdot \overline{BB_1} \Rightarrow \overline{BB_1} = \frac{I_c \cdot d\theta}{V}$$

b) Consideraciones geométricas.

Al ser el metacentro M el centro de curvatura de la curva de c.d.c., y el ángulo un infinitésimo.

$$\widehat{BB_1} = \overline{BM_c} \cdot d\theta \quad (\text{arco} = \text{radio} \times \text{ángulo})$$

y además podemos aproximar el arco a la cuerda

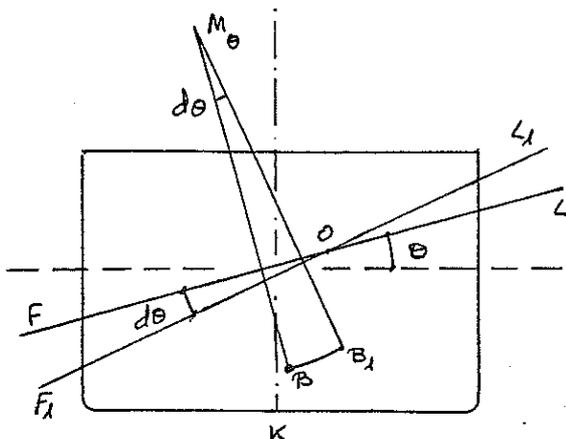
$$\widehat{BB_1} = \overline{BB_1} \Rightarrow \overline{BB_1} = \overline{BM_c} \cdot d\theta$$

Sustituyendo esta expresión en la obtenida en el apartado a) anterior.

$$\overline{BB_1} = \frac{I_c \cdot d\theta}{V} = \overline{BM_c} \cdot d\theta \Rightarrow \boxed{\overline{BM_c} = \frac{I_c}{V}}$$

Resumen:

- El momento de transferencia entre dos cuñas referidas un ángulo infinitesimal es siempre $M_G = I \cdot d\theta$
- El metacentro, o prometacentro, es el centro de curvatura de la curva de c.d.c. (B)
- En la posición de adrizado, y por simetría, el metacentro M coincidirá en el plano diametral.



- Cuando la flotación F no coincide con la de adrizado:

- El centro de curvatura M_0 recibe ahora el nombre de prometacentro.
- Normalmente el prometacentro no estará en el plano diametral.

- El lugar geométrico de todos estos centros de curvatura (para todas las flotaciones posibles), correspondientes a un volumen

de desplazamiento dado ($V = \text{cte}$) recibe el nombre de evoluta metacéntrica.

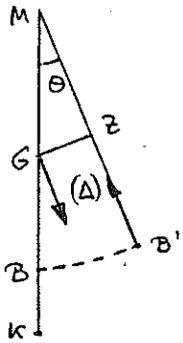
- El momento de inercia, que aparece en el numerador de la expresión del radio metacéntrico, es el momento de inercia de toda la flotación respecto del eje OO , que forzosamente ha de pasar por su centro de flotación, por lo que de no ser obvio (p.e., flotación simétrica, como la de adrizado de los buques), previamente habrá que determinar el c.d.p. de la flotación correspondiente.

1 - La expresión del radio metacéntrico es de carácter general, y por tanto válida para:

- Cualquier eje de giro OO , por ejemplo, para estabilidad longitudinal.
- Cualquier flotación, no tiene por qué ser la de adrizado.
- Cualquier tipo de flotador, por ejemplo un catemereín.

CONSIDERACIONES SOBRE LA ESTABILIDAD INICIAL.

La estabilidad inicial se caracteriza porque consideremos que el metacentro permanece fijo en todo momento. Para que esta suposición sea coherente, los ángulos de giro tendrán que ser siempre muy pequeños (zona de estabilidad inicial).



Con estas condiciones, el par adrizante, P_a , que hace que el buque recupere su estabilidad es:

$$P_a = \Delta \cdot \overline{G\bar{E}} = \Delta \cdot \overline{GM} \cdot \text{sen} \theta \approx \Delta \cdot \overline{GM} \cdot \theta$$

Al ser el ángulo θ , y por tanto su seno, muy pequeños, el parámetro que se toma como criterio de estabilidad positiva es la altura metacéntrica

$$\boxed{\overline{GM} > 0}$$

El valor de \overline{GM} depende, a su vez, de las posiciones del metacentro (\overline{KM}) y del c.d.g. (\overline{KG})

$$\overline{GM} = \overline{KM} - \overline{KG}$$

- \overline{KG} : Su valor depende del desplazamiento, Δ , pero esencialmente de la distribución de pesos a bordo.
En las primeras etapas del proyecto no se conoce, por lo que habrá que estimarlo. Con el barco ya construido se puede conocer mediante una experiencia de estabilidad, según se verá más adelante.

- \overline{KM} : Se obtiene mediante la suma de los segmentos $\overline{KM} = \overline{KB} + \overline{BM}_c$, siendo:

$$\overline{KB} = \frac{\text{Momento del } \nabla \text{ con relación al plano base } \kappa}{\nabla}$$

$$\overline{BM}_c = \frac{I_c}{\nabla}$$

Por tanto vemos que \overline{KM} solamente depende de factores geométricos, es decir, de las formas

Por lo que respecta al radio metacéntrico transversal, $\overline{BM}_c = I_c / \nabla$

- I_c : Si las flotaciones fueren rectángulos $I_c = \frac{1}{12} LB^3$. En general este área será menor que la del rectángulo que lo circunscribe, por lo que podemos expresar el momento de inercia como $I_c = n LB^3$, siendo n un coeficiente que depende de las formas de la línea de agua, por tanto $n \leq \frac{1}{12}$.

• ∇ Según la definición de coeficiente de bloque, δ , $\rightarrow \nabla = \delta L B T$

Sustituyendo

$$\overline{BM}_t = \frac{I_t}{\nabla} = \frac{n L B^3}{\delta L B T} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{BM}_t = \frac{n}{\delta} \frac{B^2}{T}}$$

n/δ suele estar comprendido entre 0,07 y 0,10. En buques mercantes un valor corriente es 0,09.

En resumen podemos decir que:

- En la expresión $\overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} - \overline{KG}$, la parte positiva más importante es \overline{BM} , por lo que la estabilidad inicial depende fundamentalmente de la manga (B^2). De ahí el viejo dicho de que la manga es estabilidad, si bien habría que matizar este tópico.
- Como se verá más adelante, el valor de \overline{GM} puede verse alterado si aparece el fenómeno de superficies libres o pesos suspendidos.
- Aunque desde el punto de vista de la estabilidad pudiera parecer conveniente un valor muy alto de \overline{GM} , también se verá que este valor no debe ser excesivo sino dentro de unos límites, aunque siempre positivo.

VARIACIONES DE LA ALTURA METACÉNTRICA POR CAMBIOS PEQUEÑOS DE LAS DIMENSIONES DEL BUQUE.-

Para comprender todo lo que se va a desarrollar en esta pregunta hay que tener en cuenta que se va a aplicar en las primeras fases del proyecto, es decir, cuando el grado de precisión de los distintos parámetros del buque es bastante pobre, de ahí que las hipótesis o aproximaciones puedan parecer algo bastas. En cualquier caso, al considerar las variaciones de las distintas magnitudes como diferenciales, ya estamos suponiendo implícitamente que van a ser pequeñas.

Se emplean dos grupos de ecuaciones:

1) Volumen de carena, ∇ , y coeficiente de bloque, δ .

$$\nabla = \delta L B T \quad \text{tomando logaritmos} \rightarrow \ln \nabla = \ln \delta + \ln L + \ln B + \ln T$$

Ahora diferenciamos

$$\frac{d\nabla}{\nabla} = \frac{d\delta}{\delta} + \frac{dL}{L} + \frac{dB}{B} + \frac{dT}{T}$$

Haciendo la hipótesis simplificativa de que el coeficiente de bloque permanece constante $\rightarrow \delta = cte \Rightarrow d\delta = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\delta}{\delta} + \frac{dL}{L} + \frac{dB}{B} + \frac{dT}{T} \quad \text{y si } dV/V \text{ lo multiplicamos y dividimos}$$

por δ

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{dL}{L} + \frac{dB}{B} + \frac{dT}{T}$$

2) Altura metacéntrica \overline{GM}_t

$$\overline{GM}_t = \overline{KB} + \overline{BM}_t - \overline{KG}$$

diferenciando

$$d\overline{GM} = d\overline{KB} + d\overline{BM}_t - d\overline{KG}$$

• $d\overline{KB}$

En principio, para obtener $d\overline{KB}$ hay que sumar el momento del volumen inicial (V), con su \overline{KB} , con el de la variación de volumen (dV), con su \overline{KB} , e igualarlo con el volumen final resultante ($V+dV$), cuyo c.d.c. estará en la posición inicial más la variación que buscamos ($\overline{KB} + d\overline{KB}$)

$$V \cdot \overline{KB} + dV \cdot \overline{KB} = (V+dV) \cdot (\overline{KB} + d\overline{KB}) \Rightarrow d\overline{KB}$$

• $d\overline{BM}_t$

La variación del radio metacéntrico ($d\overline{BM}_t$) se obtiene a partir de la expresión de la pregunta anterior

$$\overline{BM}_t = \frac{I}{V} = \frac{n}{\delta} \frac{B^2}{T} \quad \text{tomando logaritmos } \ln \overline{BM}_t = \ln(n/\delta) + 2 \ln B - \ln T$$

Diferenciando ahora, y haciendo la hipótesis simplificativa de que n/δ se mantiene constante ($\frac{n}{\delta} = cte \Rightarrow d(n/\delta) = 0$), nos queda

$$\frac{d\overline{BM}_t}{\overline{BM}_t} = 2 \frac{dB}{B} - \frac{dT}{T}$$

Esta expresión la podemos desarrollar más al considerar que $\overline{BM}_t = \overline{BG} + \overline{GM}_t$ y al diferenciar $d\overline{BM}_t = d\overline{BG} + d\overline{GM}_t$ y sustituir nos da:

$$\frac{d\overline{BG} + d\overline{GM}_t}{\overline{BG} + \overline{GM}_t} = 2 \frac{dB}{B} - \frac{dT}{T}$$

• $d\bar{k}_G$

De no ser dato habría que determinarlo. Para ello debemos tener en cuenta que la variación del \bar{k}_B se puede deber a dos posibilidades:

a) Que se añada un peso ($p = d\Delta$), en cuyo caso $d\bar{k}_G$ se determina de forma similar a $d\bar{k}_B$: sumando el momento del desplazamiento inicial al del peso añadido en su \bar{k}_p , e igualándolo al momento del desplazamiento final

$$\Delta \cdot \bar{k}_G + d\Delta \cdot \bar{k}_p = (\Delta + d\Delta) \cdot (\bar{k}_G + d\bar{k}_G) \Rightarrow d\bar{k}_G$$

En algunos casos, al desarrollar tanto esta expresión como la de $d\bar{k}_B$, el término $d\Delta \cdot d\bar{k}_G$, o' $dV \cdot d\bar{k}_B$, que nos va a aparecer, puede ser despreciable.

b) Que la variación del \bar{k}_G se deba a un traslado de pesos. En este caso habrá que aplicar el momento de transferencia

$$p \cdot d\bar{k}_p = \Delta \cdot d\bar{k}_G \Rightarrow d\bar{k}_G$$

3) Hipótesis particulares

A partir de aquí, las hipótesis particulares de cada problema pueden ser variadísimas. Así, por ejemplo:

- Si una determinada variable (Δ, L, B, T , etc.) se considere constante, su variación (o diferencial) será cero.
- Si se considere que la ordenada del c.d.c. es proporcional al calado, o que varía proporcionalmente a él:

$\bar{k}_B = a \cdot T \rightarrow$ diferenciando $d\bar{k}_B = a \cdot dT$, por ser a una constante, y para eliminarla dividimos ambas ecuaciones entre sí

$$\frac{d\bar{k}_B}{\bar{k}_B} = \frac{dT}{T}$$

- Otra hipótesis podría ser

$$\frac{d\bar{B}_G}{\bar{B}_G} = \frac{dT}{T}$$

- Si se considere que \bar{B}_G no varía $\rightarrow d\bar{B}_G = 0 \Rightarrow$

$$\frac{d\bar{B}_G + d\bar{G}M_t}{\bar{B}_G + \bar{G}M_t} = 2 \frac{dB}{B} - \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{d\bar{G}M_t}{\bar{B}M_t} = 2 \frac{dB}{B} - \frac{dT}{T}$$

En este caso, el que \bar{B}_G sea constante no quiere decir que obligatoriamente

\bar{K}_G y \bar{K}_B sean constantes, sino que las diferencias de sus variaciones se compensan entre sí.

$$\bar{B}_G = \bar{K}_G - \bar{K}_B = \text{cte} \rightarrow d\bar{B}_G = 0 = d\bar{K}_G - d\bar{K}_B$$

- Etcétera.

Ejemplo:

Supongamos que deseamos cambiar únicamente la manpa y mantener \bar{B}_G constante.

$$a) \quad \frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{dV}{V} = \cancel{\frac{dL}{L}} + \frac{dB}{B} + \cancel{\frac{dT}{T}} \quad \text{por ser } L \text{ y } T \text{ constantes.}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{dB}{B} \rightarrow d\Delta = \Delta \cdot \frac{dB}{B}$$

$$b) \quad \frac{d\bar{B}M_t}{\bar{B}M_t} = \frac{d\bar{B}_G + dGM_t}{\bar{B}M_t} = 2 \frac{dB}{B} - \frac{dT}{T} \rightarrow dGM_t = \bar{B}M_t \cdot 2 \frac{dB}{B}$$

EFFECTO DEL TRASLADO DE PESOS SOBRE LA ESTABILIDAD INICIAL.-

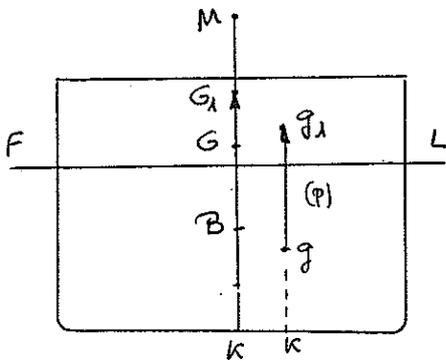
La condición que imponemos en este caso es que el peso "p" ya formaba parte del desplazamiento, es decir, Δ y ∇ permanecen constantes en todo el proceso, y así podemos aplicar el momento de transferencia.

Por ahora solamente vamos a considerar que los desplazamientos de los pesos se realizan en un plano transversal ($\alpha_p = \text{cte}$). Si bien los desplazamientos longitudinales son análogos y los estudiaremos en la estabilidad longitudinal.

Según vimos al estudiar el momento de transferencia, solamente nos interesaban la posición inicial y final del c.d.g. del peso que se traslada. Además, este vector lo podíamos descomponer en dos componentes ortonormales cualesquiera. Pues bien, a efectos de cálculo (que no tiene por qué coincidir con los movimientos reales de la maniobra) un traslado genérico transversal lo vamos a descomponer en dos: un traslado vertical y otro horizontal.

a) Traslado vertical.

De momento, y para simplificar la exposición, suponemos que la posición de partida es con el buque a drizado (G en el plano diametral).



En este primer paso suponemos que el peso "p" se traslada desde su posición original g , hasta un punto g_1 situado en su misma vertical y a una altura ($\overline{kg_1}$) igual a la de su posición definitiva ($\overline{gg_1} = \overline{kg_1} - \overline{kg}$).

Por otro lado, y como ya sabemos, el c. d. p. del buque se trasladará paralelamente a $\overline{gg_1}$, es decir, verticalmente una distancia $\overline{GG_1}$, cumpliéndose además

$$\Delta \cdot \overline{GG_1} = p \cdot \overline{gg_1} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overline{GG_1} = \frac{p \cdot \overline{gg_1}}{\Delta}}$$

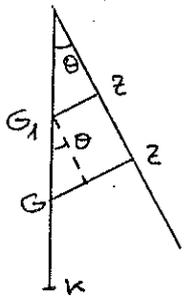
Efecto sobre \overline{GM} .- Al no variar el desplazamiento, \overline{km} permanece constante, y portanto

$$\overline{km} = \text{cte} = \overline{kg} + \overline{GM} = \overline{kg_1} + \overline{G_1M}$$

es decir, lo que aumente la coordenada \overline{kg} ($\overline{GG_1}$), es lo que disminuye

la altura metacéntrica; y recíprocamente, si el traslado desde g hasta g_1 fuere bajando, la altura metacéntrica aumentaría en \overline{GG}_1 .

Conclusión.- Como el c.d.p. (G_1) y el c.d.c. (B) siguen estando en la misma vertical no se produce ningún ángulo de escora (si partimos de la situación de adrizado), únicamente una variación de la altura metacéntrica.



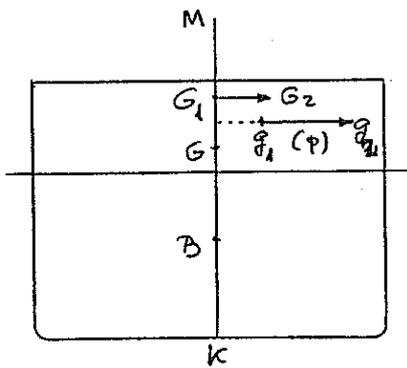
El nuevo par adrizante, para un ángulo cualquiera θ (no sólo en estabilidad inicial) será:

$$P_a = \Delta \cdot \overline{G_1 z} \quad \text{siendo} \quad \overline{G_1 z} = \overline{Gz} - \overline{GG_1} \cdot \text{sen } \theta$$

Si el c.d.p. en lugar de subir, bajase ($\overline{GG_1} < 0$), tendríamos

$$\overline{G_1 z} = \overline{Gz} + \overline{GG_1} \cdot \text{sen } \theta.$$

b) Traslado horizontal.



En este paso suponemos ahora que el c.d.p. del peso "p" se traslade horizontalmente desde la posición anterior, g_1 , hasta su posición final g_2

$$\overline{g_1 g_2} = y_{g_2} - y_{g_1}$$

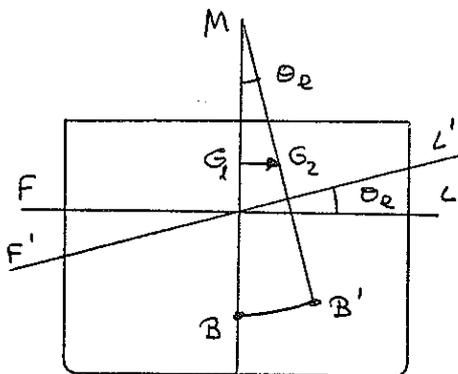
El desplazamiento $\overline{GG_2}$ del c.d.p. del buque será paralelo a $\overline{g_1 g_2}$, y por tanto horizontal, y

además

$$\Delta \cdot \overline{GG_2} = p \cdot \overline{g_1 g_2} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\overline{GG_2} = \frac{p \cdot \overline{g_1 g_2}}{\Delta}}$$

La consecuencia de este traslado horizontal es que el c.d.c. original (B), deja de estar alineado con el c.d.p. final (G_2), respecto a la vertical a la flotación, lo que producirá un par escorante $\Delta \cdot \overline{GG_2}$. Este par hará que el barco se vaya escorando hacia la banda de G_2 , hasta que encuentre su nueva posición de equilibrio.



Por efecto de este giro, el c.d.c. se irá desplazando hasta llegar a una posición B' en la que vuelva a quedar ali-

neado con el c.d.p. definitivo G_2 respecto a la vertical a la flotación final $F'Z'$.

Gráficamente podemos decir que G "ligue" a z , y que B "ligue" a G .

La conclusión final es que debido al traslado horizontal, el buque quedará con un ángulo de escora permanente θ_e .

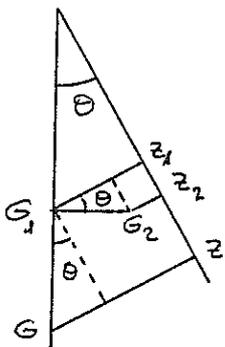
El ángulo θ_e podrá ser grande o pequeño. En el supuesto de que este ángulo sea lo suficientemente pequeño como para considerar que estamos en la zona de estabilidad inicial, y por tanto que podamos suponer que el metacentro permanece fijo

$$t_{\theta_e} = \frac{\overline{G_1 G_2}}{\overline{G_1 M}} = \frac{\rho \cdot \overline{z_1 z_2}}{\Delta \cdot \overline{G_1 M}}$$

Aunque sea adelantando conceptos, esta expresión habría que reconsiderarla en el caso de que existiesen superficies libres o pesos suspendidos.

Una vez producida la escora permanente (grande o pequeña), si por alguna causa ajena al buque se produjese cualquier inclinación θ , el nuevo par adrizante P_a sería:

1.- A la misma banda.

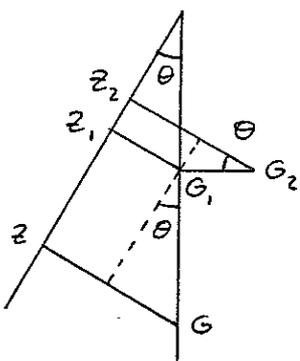


Proyectando en la dirección de $\overline{Gz_2}$

$$P_a = \Delta \cdot \overline{Gz_2 z_2} = \Delta \cdot (\overline{Gz_1} - \overline{Gz_1} \cdot \cos \theta) = \Delta \cdot (\overline{Gz_1} - \overline{GG_1} \cdot \sin \theta - \overline{Gz_1} \cdot \cos \theta)$$

Siendo $\overline{Gz_1}$ el brazo adrizante original, antes de iniciar el traslado del peso.

2.- A la banda contraria.



Proyectando análogamente:

$$P_a = \Delta \cdot \overline{Gz_2 z_2} = \Delta \cdot (\overline{Gz_1} + \overline{GG_1} \cdot \cos \theta) = \Delta \cdot (\overline{Gz_1} - \overline{GG_1} \cdot \sin \theta + \overline{Gz_1} \cdot \cos \theta)$$

Como vemos las modificaciones del brazo adrizante $\bar{G}z$ debidas a un movimiento vertical del c.d.p. ($G \rightarrow G_1$) siempre van multiplicadas por el factor seno, siendo negativas, es decir, disminuyendo el $\bar{G}z$ original, si el c.d.p. sube y positivas si baja.

Las modificaciones debidas a un traslado horizontal del c.d.p. del bu que ($G_1 \rightarrow G_2$) van multiplicadas por el factor coseno, siendo negativas cuando la escora es a la misma banda en que se encuentre G_2 , y positivas (aumenta la estabilidad) si es a la banda contraria.

$$\bar{G}z_2 = \bar{G}z \mp \bar{G}G_1 \cdot \text{sen } \theta \mp \bar{G}_1 G_2 \cdot \text{cos } \theta$$

Por último también hay que tener siempre presente que los ángulos de escora, sean grandes o pequeños, siempre se miden desde el plano diametral.

EFFECTO DE LAS SUPERFICIES LIBRES SOBRE LA ESTABILIDAD INICIAL.

Las superficies libres, o carenas líquidas, son un caso particular del traslado de pesos. Se producen cuando en un buque existen tanques parcialmente llenos de líquido. Al adquirir el buque una determinada escora, la propia naturaleza del líquido hará que éste se desplace, adaptándose a la nueva situación.

El estudio de las carenas líquidas resulta matemáticamente bastante complejo, por lo que para facilitar su estudio se hacen las siguientes hipótesis simplificativas:

a) El líquido es homogéneo ($\gamma_{\text{líquido}} = \text{cte.}$)

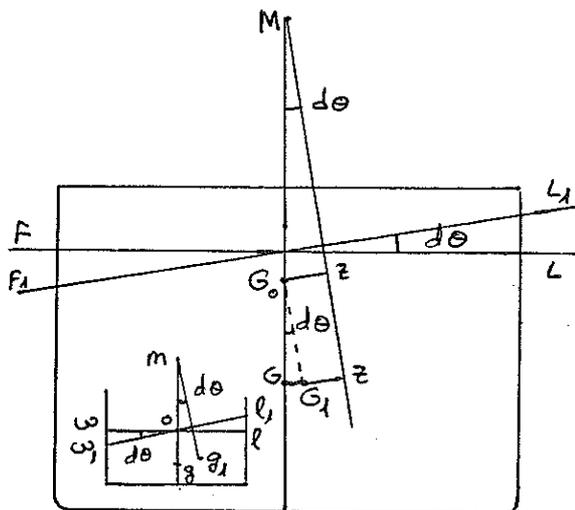
Como $P_{\text{liq}} = V_{\text{liq}} \cdot \gamma_{\text{liq}}$, al ser γ_{liq} constante, esto supone que el problema de traslado de pesos se nos transforma en un traslado de volúmenes, y además el c.d.p. del líquido que consideremos coincidirá con el c.d.p. del volumen que ocupe.

b) No existen fuerzas de inercia. En todo momento la superficie del líquido o superficie libre es un arco plano que se va a mantener paralelo en todo momento a la flotación correspondiente.

Obviamente, los tanques completamente llenos no darán superficies libres, y podemos considerar el líquido de estos tanques como si fueren sólidos.

Según todo esto, cuando se produzca una escora (grande o pequeña), la superficie libre del líquido se desplazará hasta alcanzar el ángulo correspondiente, lo que se traduce en que una parte del líquido del tanque se tendrá que trasladar, es decir, de un peso que forma parte del desplazamiento (habrá una cuña de líquido que desaparece y otra que surge), esto hará que varíe la posición del c.d.p. del líquido en el tanque, y, al mismo tiempo, se modificará la posición del c.d.p. global del buque.

De momento sólo vamos a estudiar su efecto sobre la estabilidad inicial.



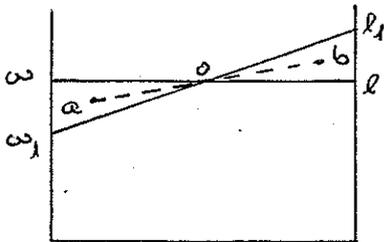
Supongamos que una acción exterior escora al buque un ángulo $d\theta$, infinitesimal. La cuña de líquido $w_0 w_1$ se trasladará hasta $l_1 o l$, con lo que el c.d.p. de todo el líquido dentro del tanque se moverá desde g hasta g_1 , y el c.d.p. del buque desde G hasta G_1 .

Esquemáticamente:

$$\omega \omega_1 \rightarrow l_1 o l \Rightarrow g \rightarrow g_1 \Rightarrow G \rightarrow G_1$$

Aunque el paso del traslado del c.d.p. de todo el líquido del tanque ($g \rightarrow g_1$) no es necesario para conocer la variación del c.d.p. del buque ($G \rightarrow G_1$), que es nuestro objetivo, vamos a incluirlo en este estudio.

$$\bullet \omega \omega_1 \rightarrow l_1 o l$$



Según venimos diciendo, como el peso de todo el líquido dentro del tanque debe permanecer constante, y hemos supuesto que el líquido es de naturaleza homogénea, los volúmenes de las cuñas $\omega \omega_1$ y $l_1 o l$ tendrán que ser iguales

$$\text{vol}(\omega \omega_1) = \text{vol}(l_1 o l) = V_c$$

y su momento de transferencia

$$M_{tr} = \tau_c \cdot \bar{a}b = \tau_l \cdot V_c \cdot \bar{a}b$$

haciendo:

τ_c = peso de cada cuña que se desplaza.

V_c = volumen de cada cuña

a y b sus respectivos c.d.p.

τ_l = peso específico del líquido.

Como todos los planteamientos y razonamientos matemáticos que hicimos para demostrar el teorema de Euler de las floteaciones y el momento de transferencia de los volúmenes de las cuñas, para llegar a la expresión del radio metacéntrico, son los mismos que en el caso que nos ocupa de los volúmenes de las cuñas de líquido (V_c) (aunque haciendo la salvedad cualitativa de que allí los volúmenes representaban empujes y ahora representan pesos), tendremos:

- Teorema de Euler -

El eje oo formado por la intersección de las áreas planas ωl y $\omega_1 l_1$ pasa por el c.d.g. de la superficie libre ωl .

(Recordemos brevemente la demostración: cálculo del volumen de la cuña $\omega \omega_1$ \rightarrow lo mismo de la $l o l_1$ \rightarrow se igualan ambos volúmenes \rightarrow simplificando los términos de esta igualdad \rightarrow momento estático de la parte de superficie ωo = momento estático de la parte $o l$ \Rightarrow el eje oo pasa por el c.d.p. de toda la superficie ωl).

- Momento de transferencia.

El momento de transferencia del volumen de las cuñas será: $v_c \cdot \bar{a}\bar{b} = i_o \cdot d\theta$

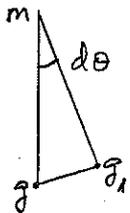
Siendo i_o el momento de inercia de toda la superficie libre w.r. respecto del eje longitudinal oo que pasa por su c.d.g.

(Descomposición: $v_c \bar{a}\bar{b} = v_c \cdot \bar{a}\bar{o} + v_c \cdot \bar{o}\bar{b} \Rightarrow$ momentos estáticos de ambas volúmenes respecto del plano vertical o \rightarrow obtención de cada momento estático mediante el cálculo integral y haciendo las aproximaciones correspondientes \rightarrow el resultado es el momento de inercia de la superficie w.r. respecto del eje oo, multiplicado por el ángulo)

Si el momento de transferencia lo aplicamos al peso

$$M_{tr} = \rho_c \cdot \bar{a}\bar{b} = \gamma_l \cdot v_c \cdot \bar{a}\bar{b} = \gamma_l \cdot i_o \cdot d\theta$$

• $\bar{g} \rightarrow \bar{g}_1$



Si llamamos ρ al peso de todo el líquido dentro del tanque y v al volumen que ocupa, su momento de transferencia será:

$$M_{tr} = \rho \cdot \bar{g}\bar{g}_1 = \gamma_l \cdot v \cdot \bar{g}\bar{g}_1$$

Iguando este momento al de las cuñas

$$M_{tr} = \rho \cdot \bar{g}\bar{g}_1 = \rho_c \cdot \bar{a}\bar{b} \rightarrow \gamma_l \cdot v \cdot \bar{g}\bar{g}_1 = \gamma_l \cdot i_o \cdot d\theta \rightarrow \bar{g}\bar{g}_1 = \frac{i_o \cdot d\theta}{v}$$

Por otro lado, si m es el centro de curvatura de la curva que describe el c.d.g. de todo el líquido del tanque, al ser $d\theta$ un infinitésimo tendremos:

$$\widehat{\bar{g}\bar{g}_1} = \bar{g}\bar{m} \cdot d\theta \quad (\text{arco} = \text{radio de curvatura} \times \text{ángulo})$$

Aproximando el arco a la cuerda

$$\widehat{\bar{g}\bar{g}_1} = \bar{g}\bar{g}_1 \rightarrow \bar{g}\bar{m} \cdot d\theta = \frac{i_o \cdot d\theta}{v} \rightarrow \boxed{\bar{g}\bar{m} = \frac{i_o}{v}}$$

con lo que nos queda una expresión totalmente similar a la del radio metacéntrico.

• $G \rightarrow G_1$

El momento de transferencia del c.d.g. del tanque será

$$M_{tr} = \Delta \cdot \bar{G}\bar{G}_1$$

y si lo igualamos al del peso de todo el líquido del tanque

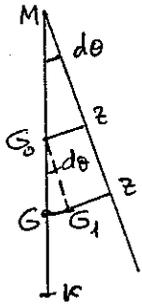
$$M_{tr} = \Delta \cdot \overline{GG}_1 = \rho \cdot \overline{GG}_1$$

Sustituyendo \overline{GG}_1 por su expresión

$$\Delta \cdot \overline{GG}_1 = \rho \cdot \frac{i_0 \cdot d\theta}{V} \rightarrow \Delta \cdot \overline{GG}_1 = \rho_2 \cdot V \cdot \frac{i_0 \cdot d\theta}{V} \rightarrow \overline{GG}_1 = \frac{i_0 r_l}{\Delta} \cdot d\theta$$

(A esta misma conclusión habríamos llegado si este momento de transferencia lo igualamos al del peso de las cuñas: $M_{tr} = \Delta \cdot \overline{GG}_1 = \rho_c \cdot a \overline{b} = \rho_2 \cdot i_0 \cdot d\theta$).

Construcción geométrica:



Si por G_1 levantamos una perpendicular a la nueva flotación $F_1 L_1$, su intersección con la recta \overline{MN} nos dará un punto G_0 , de tal forma que $\overline{G_1 z} = \overline{G_0 z}$ por construcción.

Como el efecto de las superficies libres se traduce en que el c.d.p. del buque se traslada desde G hasta G_1 , el nuevo par adrizante, considerando la superficie libre, será

$$P_{a \text{ con sup. lib.}} = \Delta \cdot \overline{G_1 z} = \Delta \cdot \overline{G_0 z} = \Delta \cdot \overline{G_0 M} \cdot \text{sen}(d\theta) = \Delta \cdot (\overline{GM} - \overline{GG}_0) \cdot \text{sen}(d\theta)$$

Ahora bien por ser el ángulo un infinitésimo

$$\overline{GG}_1 = \overline{GG}_0 = \overline{GG}_0 \cdot d\theta \rightarrow \overline{GG}_0 = \frac{\overline{GG}_1}{d\theta}$$

y si sustituimos \overline{GG}_1 por la expresión $\overline{GG}_1 = \frac{i_0 r_l}{\Delta} \cdot d\theta$ que habíamos obtenido

$$\overline{GG}_0 = \frac{\overline{GG}_1}{d\theta} = \frac{\frac{i_0 r_l}{\Delta} \cdot d\theta}{d\theta} \rightarrow \boxed{\overline{GG}_0 = \frac{i_0 r_l}{\Delta}}$$

y así

$$P_{a \text{ con s.l.}} = \Delta \cdot (\overline{GM} - \overline{GG}_0) \cdot \text{sen}(d\theta) = \Delta \cdot \left(\overline{GM} - \frac{i_0 r_l}{\Delta} \right) \cdot \text{sen}(d\theta)$$

El par adrizante del mismo buque, y en las mismas condiciones, pero sin el efecto de las superficies libres es

$$P_{a \text{ sin s.l.}} = \Delta \cdot \overline{Gz} = \Delta \cdot \overline{GM} \cdot \text{sen}(d\theta)$$

Comparando ambos pares vemos que el término altura metacéntrica sin superficies libres se corresponde con la expresión entre paréntesis.

$$\bar{G}M \longleftrightarrow \left(\bar{G}M - \frac{i_0 T_e}{\Delta} \right)$$

Después podemos concluir que el efecto que produce una superficie libre en la estabilidad inicial es como si se hubiese disminuido la altura metacéntrica original $\bar{G}M$ la cantidad $i_0 T_e / \Delta$, o dicho con otras palabras, es como si el c.d.p. del buque se hubiese elevado hasta G_0 .

$$\bar{G}G_0 = \frac{i_0 T_e}{\Delta} = \frac{i_0 T_e}{\nabla \cdot r}$$

A la distancia $\bar{G}G_0$ se le llama, por tanto, elevación virtual del c.d.p. del buque, y vemos que:

- No depende del volumen V del líquido en el tanque.
- Depende del momento de inercia, i_0 , de la superficie libre.

Como $i_0 = n l b^3$, siendo l y b la eslora y la manga del tanque, vemos que para disminuir su efecto negativo conviene disminuir la manga b mediante mamparas longitudinales que lo subdividan.

- Matemáticamente es idéntico a dejar suspendido el peso de todo el líquido dentro del tanque de su "metacentro" m . Es decir, trasladar el peso p desde su c.d.p. 'g' hasta 'm' ($g\bar{m}$). En efecto:

$$\bar{G}G_0 = \frac{\bar{G}G_1}{d\theta} = \frac{p \cdot \bar{g}d_1}{\Delta \cdot d\theta} = \frac{p \cdot \bar{g}m \cdot d\theta}{\Delta \cdot d\theta} = \frac{p \cdot \bar{g}m}{\Delta}$$

que matemáticamente se corresponde con el momento de transferencia $\Delta \cdot \bar{G}G_0 = p \cdot \bar{g}m$. La altura metacéntrica corregida por superficies libres, o disponible, será:

$$\bar{G}_0M = \bar{G}M - \bar{G}G_0 = \bar{G}M - \frac{i_0 T_e}{\Delta}$$

Observaciones.-

- Este estudio solamente es válido para la estabilidad inicial ($\bar{G}M$), pues hemos supuesto que el ángulo de escora es un infinitésimo en todo momento.
- Su efecto siempre es negativo, disminuye la altura metacéntrica útil. La presencia de las superficies libres supone, o produce el mismo efecto, que una elevación

virtual del c.d.g. del buque.

- Su efecto también es acumulativo: en el caso de que existieran varios tanques con superficies libres, e incomunicados entre sí, habría que sumarlos todos ellos.

$$\bar{G}_0 = \frac{1}{\Delta} \sum i_n \cdot r_n$$

- Un buque no se comporta como un cuerpo fijo, sino como un cuerpo "vivo" que está continuamente tratando de recuperar su posición de equilibrio, por eso, si existieran superficies libres, para todos los cálculos relativos a la estabilidad inicial hay que suponer que el c.d.g. del buque se encuentre en su posición virtual.
- La altura metacéntrica disponible, \bar{G}_M , es lo que nos van a pedir los criterios de estabilidad, y aunque expresamente no se especifique, se entiende que nos estamos refiriendo siempre a ella.

$$P'_a = \Delta \cdot \left(\overline{GM} - \frac{\overline{GG}_0}{d\theta} \right) \cdot \text{sen}(d\theta) = \Delta \left(\overline{GM} - \frac{P \cdot l}{\Delta} \frac{d\theta}{d\theta} \right) \cdot \text{sen}(d\theta) = \Delta \cdot \left(\overline{GM} - \frac{P \cdot l}{\Delta} \right) \cdot \text{sen}(d\theta)$$

Es decir: $P'_a = \Delta \cdot \left(\overline{GM} - \frac{P \cdot l}{\Delta} \right) \cdot \text{sen}(d\theta) = \Delta \left(\overline{GM} - \overline{GG}_0 \right) \cdot \text{sen}(d\theta)$

Mientras que el par adritante sin el peso suspendido, P_a , era:

$$P_a = \Delta \cdot \overline{GM} = \Delta \cdot \overline{GM} \cdot \text{sen}(d\theta)$$

Comparando ambos pares vemos que:

- El término correspondiente a la altura metacéntrica se encuentra disminuido en la cantidad $\overline{GG}_0 = P \cdot l / \Delta$
- Esta disminución es la misma que se produciría si trasladáramos el peso P una distancia l (distancia desde G hasta el punto firme de suspensión A)

$$\overline{GG}_0 = \frac{P \cdot l}{\Delta} \quad \rightarrow \quad \overline{GG}_0 \cdot \Delta = P \cdot l$$

Expresión que matemáticamente se corresponde con el momento de transferencia.

Por tanto podemos considerar el efecto de los pesos suspendidos como una elevación virtual del c.d.p. del buque desde G hasta G_0 .

$$\overline{GG}_0 = \frac{P \cdot l}{\Delta}$$

y

$$\overline{G_0M} = \overline{GM} - \overline{GG}_0 = \overline{GM} - \frac{P \cdot l}{\Delta}$$

Conclusiones.-

- Un peso suspendido se comporta como si lo hubiéramos trasladado desde el punto de apoyo hasta el punto firme del cual pende.
- No depende de la elevación real del peso, sino de la distancia desde su c.d.p. apoyado al punto firme de suspensión.
- Para los cálculos supondremos que el c.d.p. de cualquier peso suspendido se encuentra en su punto firme de suspensión en todo momento en que se encuentre en esta condición, con independencia de la posición de su c.d.p. real.
- Al igual que en el caso de las superficies libres, su efecto es acumulativo, y en el caso de que existiesen varios pesos suspendidos habría que considerar que cada uno tiene su c.d.p. en su punto firme.

EFFECTO DE LA CARGA, O DESCARGA, DE PESOS SOBRE LA ESTABILIDAD INICIAL.

Como norma general, la descarga de un peso se trata siempre como la carga de un peso "-p" en las mismas coordenadas que tiene el c.d.p. del peso a quitar.

1. Caso general

La carga de un peso "p" cualquiera, hace que varíe el desplazamiento. En consecuencia variarán todos los parámetros geométricos del buque (calado, volumen de carena, c.d. carena, etc.), así como, por otro lado, la posición del c.d. gravedad.

Conociendo las coordenadas iniciales del c.d.p. del buque ($\bar{k}_G; \bar{e}_G; \bar{x}_G$) y las coordenadas ($\bar{k}_j; \bar{e}_j; \bar{x}_j$) del peso que se carga, las coordenadas finales ($\bar{k}_{G_1}; \bar{e}_{G_1}; \bar{x}_{G_1}$) del c.d.p. del buque se determinan sin más que tomar momentos

$$\bar{k}_{G_1} = \frac{\Delta \cdot \bar{k}_G + p \cdot \bar{k}_j}{\Delta + p} ; \quad \bar{e}_{G_1} = \frac{\Delta \cdot \bar{e}_G + p \cdot \bar{e}_j}{\Delta + p} ; \quad \bar{x}_{G_1} = \frac{\Delta \cdot \bar{x}_G + p \cdot \bar{x}_j}{\Delta + p}$$

Aunque estos parámetros pueden tomar cualquier valor, grande o pequeño, en el caso que estamos viendo ahora sólo estamos considerando estabilidad transversal, (no consideramos \bar{x}_{G_1}), y además estabilidad inicial, es decir, que el metacentro final "M₁" permanece fijo, por lo tanto la coordenada \bar{e}_{G_1} no puede ser muy grande.

• La nueva altura metacéntrica $\bar{G}_1 M_1$ será

$$\bar{G}_1 M_1 = \bar{k} M_1 - \bar{k}_{G_1} = \bar{k} B_1 + \bar{B}_1 M_1 - \bar{k}_{G_1}$$

Los valores de $\bar{k} B_1$ y $\bar{B}_1 M_1$ se determinan directamente de las curvas hidrostáticas entendiéndose con el nuevo desplazamiento $\Delta_1 = \Delta + p$

La variación de la altura metacéntrica será pues $\Delta \bar{G} M = \bar{G}_1 M_1 - \bar{G} M$

• Ángulo de escora permanente. Según lo ya visto en el traslado de pesos

$$\tan \theta_e = \frac{\bar{e}_{G_1}}{\bar{G}_1 M_1}$$

Este procedimiento es el que podríamos llamar "exacto", y por tanto es válido siempre tanto si el peso que se carga es grande como si es pequeño. En lo que sigue vamos a hacer unas aproximaciones considerando que el peso que se carga es relativamente pequeño. Si no fuese así éste sería el único procedimiento válido en la práctica.

2- Carga de pesos relativamente pequeños. Aproximaciones.

En aquellos casos en los que no se pueda aplicar el procedimiento general anterior, existe un procedimiento estimativo, que es el que vamos a desarrollar a continuación.

A efectos de cálculo, la carga de un peso "p" la vamos a descomponer en dos etapas (en realidad serían tres, pero el efecto sobre el trimado se estudia al final del curso en estabilidad longitudinal, y en la mayoría de los casos es despreciable frente a la estabilidad transversal):

- 1) Carga del peso "p" en el plano diametral, y a una altura igual a la de su c.d.p. definitivo (\bar{h}_p). Esto nos va a producir una inmersión paralela a la flotación inicial, (como hemos dicho, no consideramos el efecto del trimado) con una variación de la altura metacéntrica debida a la variación del desplazamiento ($\Delta_1 = \Delta + p$).
- 2) Traslado horizontal del peso "p" desde la posición anterior hasta su posición transversal definitiva (\bar{e}_p). Como en este paso, el peso "p" ya forma parte del nuevo desplazamiento (Δ_1), se trata como un traslado transversal de pesos, ya visto, que producirá una escora permanente.

Veamos con detalle cada uno de estos pasos.

a) Inmersión paralela. Variación de la altura metacéntrica.

- Caso a.1.

Al cargar el peso "p" en el plano diametral, a una altura \bar{h}_p , se va a producir una inmersión paralela, con una variación de calado "dT", de tal forma que el incremento de empuje debido a la variación de volumen (dV), compense al nuevo peso y el buque siga flotando:

$$\phi = \gamma \cdot dV$$

La hipótesis o suposición que hacemos en este caso es considerar que el área de la flotación permanece constante en toda la variación de calado 'dT', es decir, el incremento de volumen lo vamos a considerar como un prisma recto: $dV = A_f \cdot dT$ (buzque de costados verticales). En la práctica este tipo de buques no son corrientes, por lo que para poder aplicar todo esto a un barco común, el orden de magnitud de ϕ con relación a Δ no tiene que ser muy grande, y así nada un 'dT' pequeño y tenga sentido la aproximación $A_f \approx \text{cte}$. El orden de magnitud de 'p' dependerá, pues, de las formas concretas de cada buque.

De esta hipótesis se derivan las siguientes consecuencias:

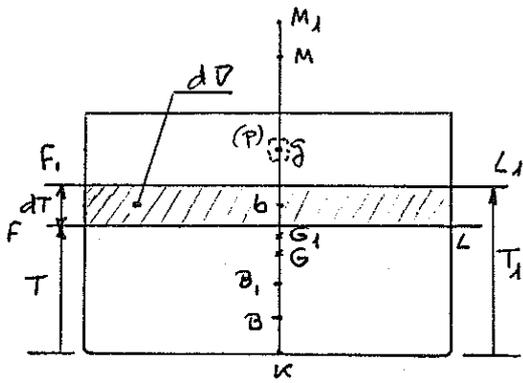
1.- El c.d.g. del volumen dV correspondiente a la rebanada FLF_1L_1 , que se sumerge este en $dT/2$, es decir:

$$\bar{k}b = T + \frac{dT}{2}$$

2.- A su vez, la variación de calado será

$$dT = \frac{dV}{A_f} \quad \text{con} \quad dV = \frac{P}{\gamma}$$

$$\text{o' } dT (\text{en cm.}) = \frac{P}{TCI}$$



3.- Por otro lado, si a lo largo de dT el área de la flotación permanece constante en su valor y en sus formas (prismático), también permanecerá constante su momento de inercia ($I = \text{cte.}$)

Teniendo todo esto en cuenta, para determinar la nueva altura metacéntrica tendremos:

$$\bar{G}_1 M_1 = \bar{k} B_1 + B_1 M_1 - \bar{k} G_1$$

Veamos uno a uno cada término de la expresión:

• $\bar{k} B_1$,

Tomando momentos de los volúmenes respecto del plano base k

	Volumen	Brazo	Momento k
inicial	V	$\bar{k} B$	$V \cdot \bar{k} B$
añadido	$dV = \frac{P}{\gamma}$	$\bar{k} b = T + \frac{dT}{2}$	$\frac{P}{\gamma} (T + \frac{dT}{2})$
final	$V_1 = V + \frac{P}{\gamma}$	$\bar{k} B_1$	$V \cdot \bar{k} B + \frac{P}{\gamma} (T + \frac{dT}{2}) \Rightarrow \bar{k} B_1 = \frac{V \cdot \bar{k} B + \frac{P}{\gamma} (T + \frac{dT}{2})}{V + \frac{P}{\gamma}}$

Multiplicando y dividiendo por γ

$$\bar{k} B_1 = \frac{V \cdot \bar{k} B + \frac{P}{\gamma} (T + \frac{dT}{2})}{V + \frac{P}{\gamma}} \cdot \frac{\gamma}{\gamma} \rightarrow \bar{k} B_1 = \frac{\Delta \cdot \bar{k} B + P (T + \frac{dT}{2})}{\Delta + P}$$

• $\bar{B}_1 M_1$,

Según ya hemos dicho, el momento de inercia de la flotación lo consideramos constante en dT

$I_{FL} = I_{F_1 L_1} = I$. Por tanto los radios metacéntricos final e inicial

$$\bar{B}_1 M_1 = \frac{I_{FL_1}}{V_1} = \frac{I}{V_1} = \frac{I}{V + dV} = \frac{I}{V + \frac{P}{\gamma}} \cdot \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{I \cdot \gamma}{\Delta + P}$$

$$\bar{B} M = \frac{I_{FL}}{V} = \frac{I}{V} \cdot \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{I \cdot \gamma}{\Delta} \Rightarrow I \cdot \gamma = \bar{B} M \cdot \Delta \quad \text{que sustituido en } \bar{B}_1 M_1 \rightarrow$$

$$\overline{B, M}_1 = \frac{\overline{B, M} \cdot \Delta}{\Delta + p}$$

• $\overline{K, G}_1$

Tomando momentos de los pesos respecto del plano base w .

	Peso	Brazo	Momento w
inicial	Δ	$\overline{K, G}$	$\Delta \cdot \overline{K, G}$
añadido	p	$\overline{K, G}_p$	$p \cdot \overline{K, G}_p$
final	$\Delta_1 = \Delta + p$	$\overline{K, G}_1$	$\Delta \cdot \overline{K, G} + p \cdot \overline{K, G}_p \Rightarrow \overline{K, G}_1 = \frac{\Delta \cdot \overline{K, G} + p \cdot \overline{K, G}_p}{\Delta + p}$

• Término resultante $\overline{G, M}_1$

$$\overline{G, M}_1 = \overline{K, B}_1 + \overline{B, M}_1 - \overline{K, G}_1 = \frac{\Delta \cdot \overline{K, B} + p \left(T + \frac{dT}{2} \right)}{\Delta + p} + \frac{\overline{B, M} \cdot \Delta}{\Delta + p} - \frac{\Delta \cdot \overline{K, G} + p \cdot \overline{K, G}_p}{\Delta + p} \rightarrow$$

$$\overline{G, M}_1 = \frac{1}{\Delta + p} \left[\Delta \left(\overline{K, B} + \overline{B, M} - \overline{K, G} \right) + p \left(T + \frac{dT}{2} - \overline{K, G}_p \right) \right] = \frac{1}{\Delta + p} \left[\Delta \cdot \overline{G, M} + p \left(T + \frac{dT}{2} - \overline{K, G}_p \right) \right]$$

• La variación de la altura metacéntrica $\delta \overline{G, M}$

$$\delta \overline{G, M} = \overline{G, M}_1 - \overline{G, M} = \frac{1}{\Delta + p} \left[\Delta \cdot \overline{G, M} + p \left(T + \frac{dT}{2} - \overline{K, G}_p \right) \right] - \overline{G, M} = \left(\frac{\Delta + p}{\Delta + p} \right) \rightarrow$$

$$\delta \overline{G, M} = \frac{1}{\Delta + p} \left[\cancel{\Delta \cdot \overline{G, M}} + p \left(T + \frac{dT}{2} - \overline{K, G}_p \right) - \left(\cancel{\Delta \cdot \overline{G, M}} + p \cdot \overline{G, M} \right) \right] \rightarrow$$

$$\boxed{\delta \overline{G, M} = \frac{p}{\Delta + p} \left[T + \frac{dT}{2} - \overline{K, G}_p - \overline{G, M} \right] = \frac{p}{\Delta + p} \left[\overline{K, B} - \overline{K, G}_p - \overline{G, M} \right]}$$

Si en vez de la carepa de un peso se trata de una ~~descarga~~ habría que sustituir en esta expresión "p" por "-p" y "dT" por "-dT", pues sería una emersión, permaneciendo igual el resto de los valores.

- Caso a.2.

Algunos textos obtienen una expresión similar, pero haciendo todavía una simplificación mayor, es decir, consideran el caso de que "p" sea lo suficientemente pequeño frente al desplazamiento " Δ ", como para poderlo considerar un "infinitésimo" ($p = d\Delta$)

Vamos a obtener $\delta \overline{G, M}$ también en este caso. Razonando análogamente

$$\overline{G, M}_1 = \overline{K, B}_1 + \overline{B, M}_1 - \overline{K, G}_1$$

$$\bullet \bar{k}_{B_1} = \bar{k}_B + d\bar{k}_B$$

Tomando momentos de los volúmenes respecto del plano base

$$(\Delta + P) \cdot \bar{k}_{B_1} = \Delta \cdot \bar{k}_B + P \left(T + \frac{dT}{2} \right) \quad \text{multiplicando ambos miembros por } \gamma$$

$$(\Delta + P) \cdot \bar{k}_{B_1} = \Delta \cdot \bar{k}_B + P \left(T + \frac{dT}{2} \right) \quad \text{pero } \bar{k}_{B_1} = \bar{k}_B + d\bar{k}_B \rightarrow$$

$$(\Delta + P) (\bar{k}_B + d\bar{k}_B) = \Delta \cdot \bar{k}_B + P \left(T + \frac{dT}{2} \right) \rightarrow$$

$$\cancel{\Delta \cdot \bar{k}_B} + \Delta \cdot d\bar{k}_B + P \cdot \bar{k}_B + P \cdot d\bar{k}_B = \cancel{\Delta \cdot \bar{k}_B} + P \left(T + \frac{dT}{2} \right)$$

Con lo que nos queda una ecuación de "infinitesimos" de primer orden, excepto el término $P \cdot d\bar{k}_B$, que sería de segundo orden

$$P \cdot d\bar{k}_B = d\Delta \cdot d\bar{k}_B \approx 0$$

Al despreciarlo nos queda

$$\Delta \cdot d\bar{k}_B + P \cdot \bar{k}_B = P \left(T + \frac{dT}{2} \right) \Rightarrow d\bar{k}_B = \frac{P}{\Delta} \left(T + \frac{dT}{2} - \bar{k}_B \right)$$

$$\bullet \bar{B}_{M_1}$$

$$\bar{B}_{M_1} = \bar{B}_M + d\bar{B}_M$$

$$\bar{B}_M = \frac{I}{V} \Rightarrow d\bar{B}_M = \frac{dI}{V} - \frac{I}{V^2} dV \quad \text{pero, como ya hemos comentado, al ser el$$

aire de la flotación constante también lo era su momento de inercia ($dI=0$), con lo que nos queda

$$d\bar{B}_M = - \frac{I}{V} \frac{dV}{V} = - \bar{B}_M \cdot \frac{dV}{V} = \left(\frac{\gamma}{\Delta} \right) \Rightarrow d\bar{B}_M = - \bar{B}_M \cdot \frac{\gamma}{\Delta}$$

$$\bullet \bar{k}_G = \bar{k}_G + d\bar{k}_G$$

Tomando momentos de los pesos respecto al plano base

$$(\Delta + P) \cdot \bar{k}_G = \Delta \cdot \bar{k}_G + P \cdot \bar{k}_G \rightarrow (\Delta + P) (\bar{k}_G + d\bar{k}_G) = \Delta \cdot \bar{k}_G + P \cdot \bar{k}_G$$

Razonando análogamente a como hicimos con \bar{k}_{B_1} , ($P \cdot d\bar{k}_G = d\Delta \cdot d\bar{k}_G \approx 0$), nos queda

$$d\bar{k}_G = \frac{P}{\Delta} (\bar{k}_G - \bar{k}_G)$$

$$\bullet \bar{G}_{M_1}$$

$$\bar{G}_{M_1} = \bar{k}_{B_1} + \bar{B}_{M_1} - \bar{k}_G = (\bar{k}_B + d\bar{k}_B) + (\bar{B}_M + d\bar{B}_M) - (\bar{k}_G + d\bar{k}_G) \rightarrow$$

$$\bar{G}_{M_1} = \bar{k}_B + \frac{P}{\Delta} \left(T + \frac{dT}{2} - \bar{k}_B \right) + \bar{B}_M - \bar{B}_M \cdot \frac{P}{\Delta} - \bar{k}_G - \frac{P}{\Delta} (\bar{k}_G - \bar{k}_G) \rightarrow$$

$$\bar{G}_{M_1} = \bar{G}_M + \frac{P}{\Delta} \left(T + \frac{dT}{2} - \bar{k}_B - \bar{B}_M - \bar{k}_G + \bar{k}_G \right) = \bar{G}_M + \frac{P}{\Delta} \left(T + \frac{dT}{2} - \bar{k}_B - \bar{B}_M \right)$$

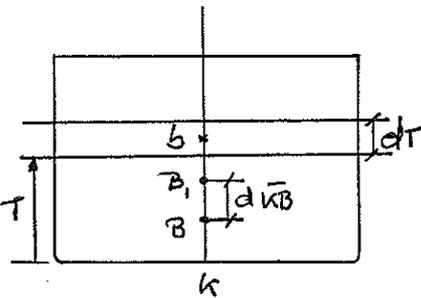
Por tanto, la variación de la altura metacéntrica nos queda $\rightarrow \delta \bar{GM} = \bar{G}_1 M_1 - \bar{GM} \rightarrow$

$$\delta \bar{GM} = \frac{P}{\Delta} \left(T + \frac{dT}{2} - \bar{k}_F - \bar{GM} \right) = \frac{P}{\Delta} (\bar{k}_b - \bar{k}_F - \bar{GM})$$

Expresión análoga a la anterior de $\delta \bar{GM}$ haciendo la aproximación $\Delta + p \approx \Delta$

En estos razonamientos siempre hemos tomado momentos respecto al plano base. Sin embargo, podemos tomar momentos respecto de cualquier otro plano. Como ejemplo, y para poner familiaridad con este tipo de desarrollos tan frecuentes, vamos a repetir este último caso cambiando las referencias.

• $d\bar{k}_B$



Tomando momentos respecto al plano paralelo al plano base que pasa por el c.d.g. original B

$$0 \cdot 0 + dV(\bar{k}_b - \bar{k}_B) = (V + dV) \cdot d\bar{k}_B \rightarrow$$

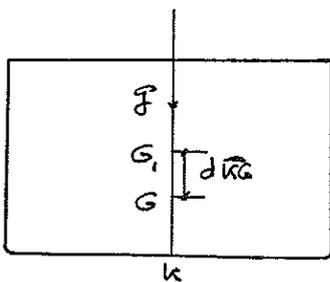
$$d\bar{k}_B = \frac{dV}{V + dV} (\bar{k}_b - \bar{k}_B) \cdot \left(\frac{T}{T} \right) = \frac{P}{\Delta + p} (\bar{k}_b - \bar{k}_B) \approx \frac{P}{\Delta} (\bar{k}_b - \bar{k}_B)$$

$$\text{con } \bar{k}_b = T + \frac{dT}{2} \rightarrow d\bar{k}_B = \frac{P}{\Delta} \left(T + \frac{dT}{2} - \bar{k}_B \right)$$

• $d\bar{BM}$

$$\bar{BM} = \frac{I}{V} \Rightarrow d\bar{BM} = \frac{dI}{V} - \frac{I}{V^2} dV = -\bar{BM} \cdot \frac{dV}{V} \cdot \left(\frac{T}{T} \right) \Rightarrow d\bar{BM} = -\bar{BM} \cdot \frac{P}{\Delta}$$

• $d\bar{k}_G$



Tomando momentos respecto al plano horizontal que pasa por el c.d.g. original G

$$\Delta \cdot 0 + P(\bar{k}_F - \bar{k}_G) = (\Delta + P) \cdot d\bar{k}_G \rightarrow$$

$$d\bar{k}_G = \frac{P}{\Delta + P} (\bar{k}_F - \bar{k}_G) \approx \frac{P}{\Delta} (\bar{k}_F - \bar{k}_G)$$

• $\delta \bar{GM}$

$$\bar{GM} = \bar{k}_B + \bar{BM} - \bar{k}_G \rightarrow \delta \bar{GM} = d\bar{k}_B + d\bar{BM} - d\bar{k}_G \quad \text{Sustituyendo}$$

$$\delta \bar{GM} = \frac{P}{\Delta} \left(T + \frac{dT}{2} - \bar{k}_B - \bar{BM} + \bar{k}_G - \bar{k}_F \right)$$

Y como $-\bar{k}_B - \bar{B}_M + \bar{k}_G = -\bar{G}_M$ nos queda

$$\delta \bar{G}_M = \frac{P}{\Delta} \left(T + \frac{dT}{2} - \bar{k}_P - \bar{G}_M \right)$$

- Caso a.3.

Una última aproximación, muchísimo más basta, es considerar que \bar{k}_M no varía. Para que esta suposición sea aceptable, "p" tiene que ser tan pequeño que, a efectos prácticos, sea despreciable.

$$\bar{k}_M = \text{cte} \Rightarrow d\bar{k}_M = 0 \rightarrow \delta \bar{G}_M = d\bar{k}_M - d\bar{k}_G \rightarrow$$

$$\delta \bar{G}_M = -d\bar{k}_G$$

Como vemos, este caso es similar al traslado vertical de pesos.

- Conclusiones:

Aunque en cada caso hay que valorar el grado de conocimiento que tengamos de los distintos valores o parámetros y los órdenes de magnitud de las distintas cifras que estemos manejando, podemos decir que, en general, el orden de prioridades para la aplicación de estos casos es el siguiente:

1.- Caso general con las curvas hidrostáticas: - Siempre que se pueda, y para cualquier peso, por ser el más preciso, Normalmente será el único aplicable cuando el peso que se carga no se le pueda considerar relativamente pequeño.

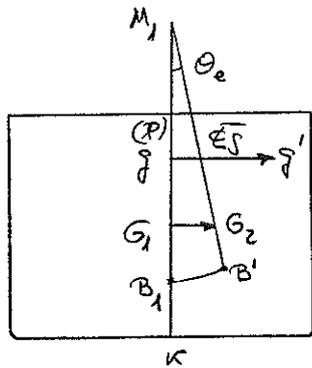
2.- $\delta \bar{G}_M = \frac{P}{\Delta + p} [\bar{k}_B - \bar{k}_P - \bar{G}_M]_{\text{inicial}}$ - Recordemos que la hipótesis matemática que hemos hecho para obtener esta expresión es que el área de la flotación permanece constante en toda la variación del calado. Por tanto, siempre que se cumple esto (buzque de costados verticales), esta expresión es exacta, aunque el peso no sea relativamente pequeño. En la práctica, lo normal es que el buque no sea de costados verticales, por lo que para poder aplicar esta fórmula, el orden de magnitud de "p" sobre Δ debe ser tal que tenga sentido el considerar que el área de la flotación permanece constante en toda la variación del calado dT . El valor aceptable dependerá de las formas de cada buque.

3.- $\delta \bar{G}_M = \frac{P}{\Delta} [\bar{k}_B - \bar{k}_P - \bar{G}_M]_{\text{inicial}}$ - En este caso "p" tiene que ser lo suficientemente pequeño para poder aproximar $\Delta + p \approx \Delta$, es decir $\frac{P}{\Delta + p} \approx \frac{P}{\Delta}$, lo cual, obviamente, dependerá del número de cifras decimales que sean representativas.

4.- $\bar{k}_M_{\text{final}} \approx \bar{k}_M_{\text{inicial}} \Rightarrow \delta \bar{G}_M = -d\bar{k}_G$ - En este caso el peso "p" tiene que ser prácticamente despreciable frente al desplazamiento (menor del 1%).

5) Traslado horizontal del peso. Ángulo de escora permanente.

Como ya hemos dicho, en este paso el peso "p" ya forma parte del nuevo desplazamiento, $\Delta_1 = \Delta + p$, con lo que el problema se reduce a un simple traslado de pesos. Como de momento estamos suponiendo que no nos salimos de la zona de estabilidad inicial, el metacentro M_1 podemos considerar que permanece fijo.



Al mover el peso "p" desde "j" hasta su posición final "j'", una distancia $\overline{E_j}$, el c.d.g. del buque se desplazará desde G_1 hasta su posición definitiva G_2 .

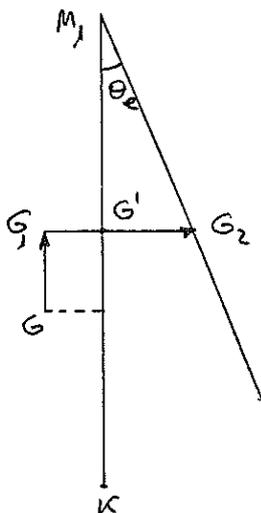
Por el momento de transferencia,

$$(\Delta + p) \overline{G_1 G_2} = p \cdot \overline{E_j} \rightarrow \overline{G_1 G_2} = \frac{p \cdot \overline{E_j}}{\Delta + p}$$

Por otro lado, si nos fijamos en la geometría de la figura, vemos que $\overline{G_1 G_2} = \overline{G_1 M_1} \times \text{tg} \theta_e$, que sustituido en la expresión anterior nos queda:

$$\frac{p \cdot \overline{E_j}}{\Delta + p} = \overline{G_1 M_1} \times \text{tg} \theta_e \rightarrow \boxed{\text{tg} \theta_e = \frac{\overline{G_1 G_2}}{\overline{G_1 M_1}} = \frac{p \cdot \overline{E_j}}{(\Delta + p) \overline{G_1 M_1}}}$$

- En el caso de que el buque ya tuviera originalmente otra escora permanente, es decir, antes de cargar el peso "p", esto significaría decir que el c.d.g. inicial, G , no estaba en el plano diametral, por tanto G_1 de la inmersión paralela tampoco lo estaría. Para obtener el ángulo de escora permanente definitivo habría que sumar vectorialmente el valor de $\overline{G_1 G_2}$, obtenido por el momento de transferencia, al punto G_1 . Por ejemplo, si suponemos que el c.d.g. original, G , estaba a babor, el ángulo de escora permanente sería:



$$\text{tg} \theta_e = \frac{\overline{G_1 G_2}}{\overline{G_1 M_1}}$$

ya que los ángulos de escora se miden siempre respecto al plano diametral.

Obviamente seguimos suponiendo estabilidad inicial (M_1 fijo)

Consideraciones sobre las superficies libres en este estudio.

a) Inmersión paralela

Para obtener la expresión $\delta \overline{GM} = \frac{P}{\Delta + p} [\overline{KB} - \overline{KG} - \overline{GM}]$ hemos considerado que:

$$\overline{G_0M_1} = \overline{KB_1} + \overline{B_1M_1} - \overline{KG_1} \quad \text{y} \quad \overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} - \overline{KG}$$

es decir, no hemos considerado para nada el efecto de las posibles superficies libres o pesos suspendidos. Por tanto, y siempre que se pueda:

- Si el buque originalmente no tenía superficies libres, pero el peso añadido es un líquido que sí las va a presentar, la variación total de la altura metacéntrica será la debida a la carga del peso en sí (considerado como "sólido") más la pérdida añadida del efecto de las superficies libres.

$$\delta \overline{GM} = \frac{P}{\Delta + p} [\overline{KB} - \overline{KG} - \overline{GM}] - \frac{i \tau_e}{\Delta + p} = \overline{G_0M_1} - \overline{GM}$$

El signo menos es porque como sabemos las superficies libres siempre van a disminuir el \overline{GM} disponible.

- En el supuesto de que inicialmente ya existieran superficies libres, hay que tener en cuenta que la elevación virtual del c.d.g., y por consiguiente su repercusión sobre la altura metacéntrica, es distinto en la situación final que en la inicial, ya que

$$\frac{(\sum i \tau_e)_{ini}}{\Delta} \neq \frac{(\sum i \tau_e)_{inic}}{\Delta + p} \Rightarrow \overline{GG_0}_{inicial} \neq \overline{GG_0}_{final}$$

Si además el peso añadido fuese un líquido que a su vez presentase una nueva superficie libre, la elevación virtual final del c.d.g. será

$$\overline{GG_0}_{final} = \frac{1}{\Delta + p} [(\sum i \tau_e)_{inicial} + (i \tau_e)_{añadido}]$$

• Conclusión

Aunque cuantitativamente, y siempre y cuando estén controladas, en la mayoría de los casos el efecto de las superficies libres va a ser muy pequeño, o incluso despreciable, según el grado de aproximación con el que estemos trabajando, conceptualmente es muy importante. Por tanto, y siempre que se pueda, el procedimien-

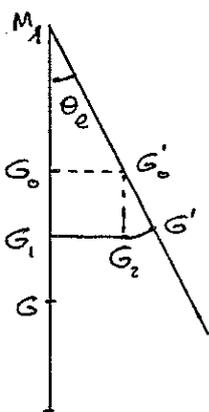
to correcto sería:

- 1° Determinar el \overline{GM} inicial como si todos los pesos fueran sólidos (\overline{GM}_i), así como $(\sum i r_e)$ inicial.
- 2° Calcular $\delta \overline{GM} = \frac{P}{\Delta + P} [\overline{KB} - \overline{KG} - \overline{GM}_i]$ como si el peso añadido fuese un sólido.
- 3° La variación final total de la altura metacéntrica sobre \overline{GM}_i será:

$$\delta \overline{GM} = \frac{P}{\Delta + P} [\overline{KB} - \overline{KG} - \overline{GM}_i] - \frac{(\sum i r_e)_{inicial} + (\sum i r_e)_{añadido}}{\Delta + P}$$

b) Ángulo de escora permanente con superficies libres.

Al estar suponiendo estabilidad inicial consideremos que el metacentro permanece fijo en todo momento y en el plano diametral. Por otro lado, para determinar el ángulo de escora permanente, además del traslado de pesos debemos considerar la elevación virtual del c.d.p.



En consecuencia, en la situación final de equilibrio, cuando el brazo adrizante sea cero porque los centros de gravedad y de escora queden alineados, el c.d.p. del buque no estará en G_2 sino en algún punto G_1' , lo que hace que a efectos de cálculo lo podamos considerar en la posición virtual G_0' . Como ya sabemos esta elevación virtual toma el valor

$$\overline{G_2 G_0'} = \overline{G_2 G_0} = \frac{\sum i r_e}{\Delta_1}$$

y el ángulo de equilibrio o ángulo de escora permanente será: $\text{tg } \theta_e = \frac{\overline{G_0 G_0'}}{\overline{G_0 M_1}}$

Como $\overline{G_0 G_0'} = \overline{G_1 G_2}$ por construcción, nos queda

$$\text{tg } \theta_e = \frac{\overline{G_1 G_2}}{\overline{G_0 M_1}}$$

A su vez, si hemos utilizado la aproximación de pesos pequeños, ya comentada, cada uno de estos términos tomará los valores

$$\overline{G_0 M_1} = \overline{GM}_i + \delta \overline{GM} = \overline{GM}_i + \frac{P}{\Delta_1} [\overline{KB} - \overline{KG} - \overline{GM}_i] - \frac{\sum i r_e}{\Delta_1} \quad \gamma$$

$$\overline{G_1 G_2} = \frac{P \cdot \overline{KG}}{\Delta_1}$$

EXPERIENCIA DE ESTABILIDAD CORRIENTE.-

Objetivo.-

Es una prueba o experiencia que permite conocer con cierta exactitud la posición del c.d.p. del buque ($\bar{K}G$). Mediante la experiencia en sí determinamos la altura metacéntrica \bar{GM} . Conocido el valor de \bar{KM} (bien por las curvas hidrostáticas o por cálculo directo a partir de las formas) correspondiente al desplazamiento en el momento de la experiencia, podemos calcular \bar{KG} .

Procedimiento.-

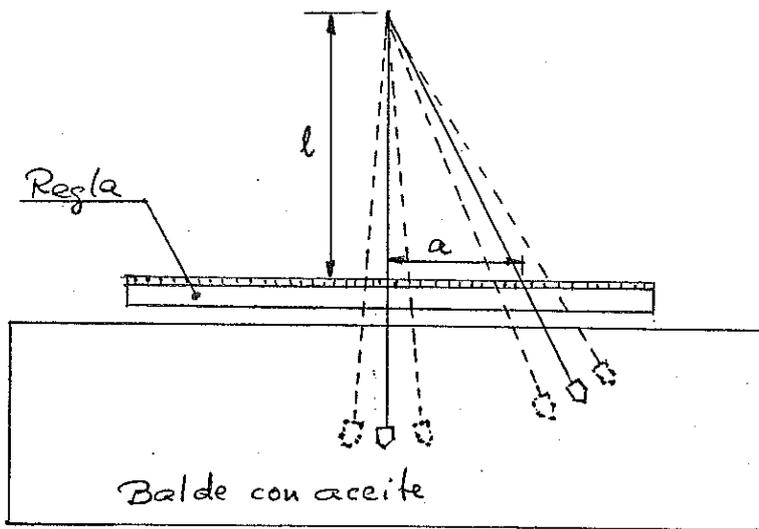
La parte experimental consiste en mover transversalmente uno, o varios, pesos "p" conocidos, una distancia "d" medida con un metro, lo cual nos va a producir una escora permanente. Este ángulo tiene que ser lo suficientemente pequeño ($\alpha < 2^\circ$) para poder suponer estabilidad inicial, y tradicionalmente se determina midiendo las desviaciones "a" de uno, o varios péndulos de longitud "l" conocida, aunque modernamente existen dispositivos que miden directamente el ángulo de escora.

En líneas generales, los pesos serán los siguientes:

- a) Peso (o pesos) "p" en su posición inicial, que aunque de lo mismo, suponemos, por ejemplo, que está en cruz. Lectura de los calados para obtener el desplazamiento del buque en la experiencia, y determinación de la posición inicial de los péndulos.
- b) Traslado del peso (o pesos) a una banda. Lectura de las desviaciones "a" de los péndulos.
- c) Traslado del peso a la posición inicial. Lectura de la posición de los péndulos comparándolas con las obtenidas en el punto a).
- d) Traslado del peso a la banda contraria. Nueva lectura de las desviaciones "a".
- e) Colocación del peso en la posición de partida. Determinación, otra vez, de la posición de los péndulos comparándolas con las del apartado a).

Estas operaciones deben repetirse varias veces para obtener una estadística y sacar la media de todas las desviaciones, eliminando los valores extraños.

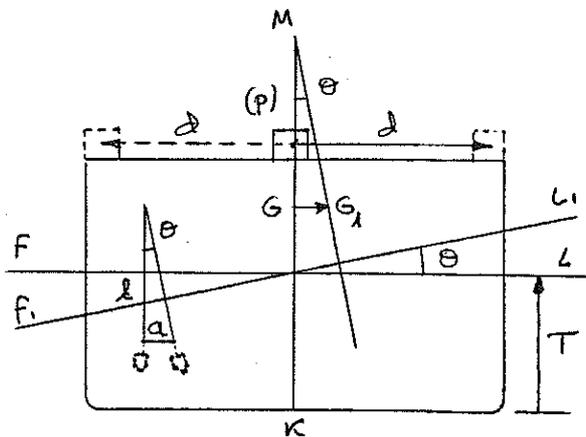
Por lo que respecta a los péndulos, difícilmente se estarán quietos en cada posición, lo normal es que estén oscilando sobre un determinado punto en cada caso. Son precisamente estos puntos los que hay que determinar para establecer los valores "a" de las desviaciones.



Aunque por un lado los movimientos de los péndulos deben ser libres para que las lecturas sean representativas, por otro no interesa que las oscilaciones sean demasiado "vivas"; por lo que se suele poner como amortiguador un balde con aceite o agua, y a su vez la plomada puede tener una forma con aletas que aumente el efecto amortiguador.

En cuanto al peso suelen ser bloques de hormigón o bidones con granalla de acero, de forma que su c.d.g. sea fácil de determinar.

Determinación de \overline{GM} y \overline{KG} .



Como estamos suponiendo estabilidad inicial

$$\tan \theta = \frac{\overline{GG_1}}{\overline{GM}} \rightarrow \overline{GM} = \frac{\overline{GG_1}}{\tan \theta}$$

Al formar el peso p parte del desplazamiento de la experiencia, podemos aplicar el momento de transferencia

$$p \cdot d = \Delta \cdot \overline{GG_1} \rightarrow \overline{GG_1} = \frac{p \cdot d}{\Delta}$$

que sustituido en la expresión anterior nos da:

$$\overline{GM} = \frac{p \cdot d}{\Delta \cdot \tan \theta}$$

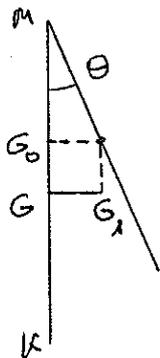
Si la tangente del ángulo lo medimos con un péndulo, $\tan \theta = \frac{a}{l}$. Sustituyendo

$$\overline{GM} = \frac{p \cdot d \cdot l}{\Delta \cdot a}$$

Determinando por otro lado el valor de \bar{KM} a partir del calado, ya podemos calcular \bar{KG}

$$\bar{KG} = \bar{KM} - \bar{GM}$$

Si en el momento de la experiencia el buque tuviese superficies libres, (que hay que procurar que no las tenga o que sean mínimas), debemos tener en cuenta que el valor de \bar{GM} que determinamos al mover el peso es la altura metacéntrica disponible, es decir, respecto del c.d.p. virtual (G_0M). Para determinar la posición "real" del c.d.g. (\bar{KG}) hay que hacer la "corrección" correspondiente.



$$\bar{G}_0M = \frac{P \cdot d}{\Delta \cdot \tan \theta} \quad \text{con} \quad \bar{G}G_0 = \frac{\Sigma i r}{\Delta}$$

Al ser $\bar{KG} = \bar{KM} - \bar{GM}$ nos queda.

$$\bar{KG} = \bar{KM} - [\bar{G}_0M + \bar{G}G_0] = \bar{KM} - \left[\frac{P \cdot d}{\Delta \cdot \tan \theta} + \frac{\Sigma i r}{\Delta} \right]$$

Observaciones.-

- 1.- Al considerar que el metacentro permanece fijo, esta experiencia sólo tiene sentido cuando el ángulo de escora es muy pequeño. En la práctica, cuando haya que preparar una experiencia, hay que seleccionar el peso p estimando el \bar{GM} para obtener un ángulo de escora: $\theta \approx 1^\circ$ para buques grandes, $\theta \approx 1,5^\circ$ para buques con una estora de unos 120 metros ó $\theta \approx 2^\circ - 3^\circ$ para embarcaciones menores.
- 2.- La experiencia de estabilidad se puede realizar en cualquier momento y en cualquier situación de carga del buque, si bien hay un caso muy especial, que es la experiencia de estabilidad exigida por la Administración para determinar el desplazamiento y la posición del c.d.g. del buque en rotca.

Consideraciones a tener en cuenta.-

Previamente hay que redactar un documento con el procedimiento de la prueba, que designe al personal necesario y la secuencia de tareas concretas que debe realizar cada uno, para evitar batallas, improvisaciones, etc. Asimismo deben quedar preparados y listos todos los elementos necesarios para la experiencia. (pesos, péndulos, grúas, etc.) con la suficiente antelación.

Por lo que respecta a la propia experiencia, hay que tener en cuenta todas las consideraciones de sentido común que pueden afectar al G.M., por ejemplo:

- El buque debe flotar libremente. Los amarres, fondeos, etc. deben tener una influencia nula.
- Los agentes externos (viento, olas, mareas, etc.) nos puedan perturbar las lecturas, por lo que hay que procurar hacer la experiencia cuando no actúen.
- El peso de la experiencia debe conocerse exactamente, así como su c.d.p. Los pesos de a bordo deben estar bien trincados. Los pesos extraños al buque (andamios, cables, equipos de soldadura, etc.), deben ser los menos posibles; análogamente, el personal a bordo debe ser el mínimo imprescindible.
- Hay que conocer con bastante exactitud el desplazamiento, tomando la lectura de los calados, con todas las pesas de la experiencia a bordo, e incluso conviene medir la densidad del agua ($\Delta = \gamma \cdot V$), pues tanto en las curvas hidrostáticas, como en la integración de las formas, lo que obtenemos es el volumen de carena (la curva de desplazamiento que aparece en las curvas hidrostáticas se determina suponiendo un peso específico del agua).
- Los péndulos deben ser lo más largos posible para aumentar la exactitud de la medida del ángulo. Conviene poner tres o más, repartidos a lo largo de la estora, y tomar las medias, a ser posible en cruzía.
- Los pesos que más pueden falsear los datos de la experiencia son los líquidos al darnos una elevación virtual del c.d.p. del buque. En la práctica es muy difícil conocer exactamente los pesos y las superficies libres reales de los líquidos, por lo que, siempre que ello sea posible, los tanques y calderas deben estar secos, o si no totalmente llenos hasta los rebosos o tubos de aireación.

Experiencia de estabilidad según la Administración -

(En hojas aparte)

MOVIMIENTOS DE BALANCE Y VALORES DE LA ALTURA METACÉNTRICA -

(En hojas aparte)

TEORÍA DEL BUQUE I

DIAGRAMAS DE ESTABILIDAD Y SUS APLICACIONES

DIAGRAMAS DE ESTABILIDAD.-

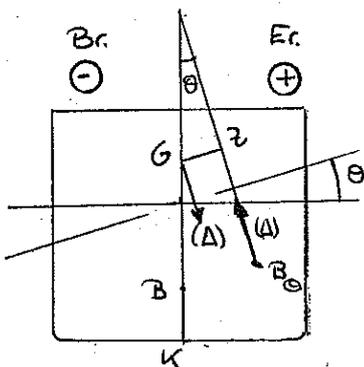
Los diagramas de estabilidad no son más que una representación gráfica de la capacidad adrizante de un buque para cada ángulo de escora. Los diagramas pueden ser de dos tipos:

- 1.- Diagrama estático.
- 2.- Diagrama dinámico.

En ambos casos la capacidad adrizante se puede expresar en función del par adrizante o del brazo adrizante.

1.- DIAGRAMA ESTÁTICO O CURVA DE BRAZOS ADRIZANTES (\overline{GZ} - θ).

Introducción.-



Par adrizante

Cuando por el efecto de una acción escorante, un buque se separe de su posición de equilibrio, el c.d.c. modifica su posición ($B \rightarrow B_\theta$). Esto hace que deje de estar alineado con el c.d.g., G , apareciendo así un par, que debe tratar de que el buque regrese a su antigua posición de equilibrio. A este par se le conoce como par adrizante (P_a).

Para una determinada condición de navegación (Δ , $K\overline{G}$ y trimado dados), el valor del par adrizante dependerá de las distintas posiciones que vaya ocupando el c.d.c. (B_θ), y por tanto del ángulo de escora (θ).

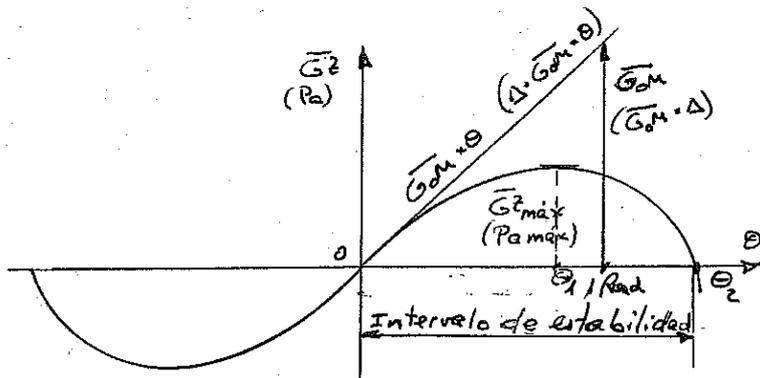
El diagrama estático no es más que la representación gráfica de la función $P_a = f(\theta)$. Ahora bien, si tenemos en cuenta que el par adrizante es igual a la fuerza (desplazamiento, Δ) por la mínima distancia (\overline{GZ}).

$$P_a = \Delta \cdot \overline{GZ}$$

y que una vez definida la condición de navegación, el desplazamiento Δ , permanece constante, esta curva será la misma si solamente representamos la función

$\bar{Gz} = \frac{Pa}{\Delta}$, es decir, $\bar{Gz} = f(\theta)$. Para ello no hay más que adaptar el correspondiente factor de escala. Este último diagrama $\bar{Gz} - \theta$ es el que se utiliza en la práctica, y a la función $\bar{Gz} = f(\theta)$ se la conoce como brazo adrizante.

Características más importantes de estas curvas.



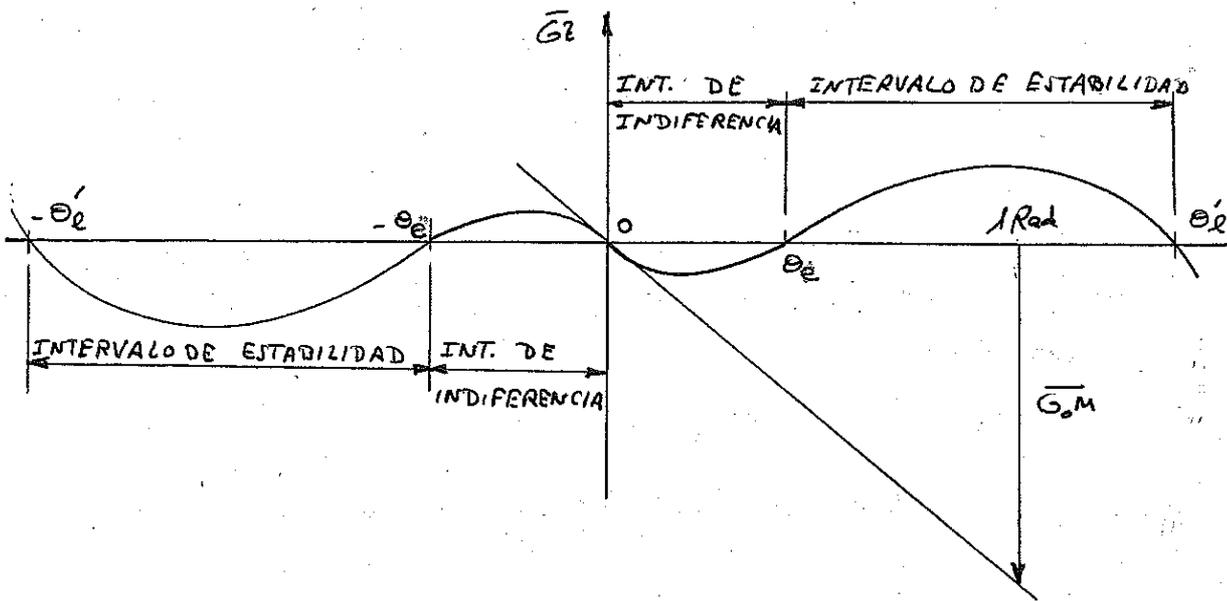
Si suponemos que el buque es simétrico y que en la posición inicial de equilibrio, el c.d.p. y el c.d.e. están alineados en su plano diametral, la curva de brazos adrizantes (pares adrizantes) es una curva con simetría impar respecto del origen.

Las características más importantes, a efectos prácticos, de estas curvas son cuatro:

- 1.- La tangente en el origen. Nos permite conocer el valor de la altura metacéntrica disponible, G_0M (o $G_0M + \Delta$). Si tenemos en cuenta que en estabilidad inicial $Pa = \Delta \cdot \bar{Gz} = \Delta \cdot G_0M \cdot \text{sen } \theta = \Delta \cdot G_0M \cdot \theta$, para leer el valor de G_0M en la misma escala que \bar{Gz} (o $\Delta \cdot G_0M$ en la escala de Pa), tenemos que hacer $\theta = 1 \text{ radián} \approx 57,3^\circ$, con lo cual $\bar{Gz} = G_0M \times 1$ ($Pa = \Delta \cdot G_0M \times 1$)
- 2.- El brazo máximo, $\bar{Gz}_{\text{máx}}$, (o $Pa_{\text{máx}}$) y su ángulo θ_1 correspondiente.
- 3.- El ángulo límite, θ_2 , a partir del cual el buque pierde su capacidad adrizante ($\bar{Gz} \leq 0$ o $Pa \leq 0$), y que nos delimita, por tanto, el intervalo de estabilidad ($0 \leq \theta \leq \theta_2$).
- 4.- El área encerrada por la curva, que nos va a dar:
 - los brazos dinámicos, si trabajamos con brazos estáticos o brazos adrizantes \bar{Gz} , o
 - la estabilidad dinámica, si trabajamos con pares adrizantes.

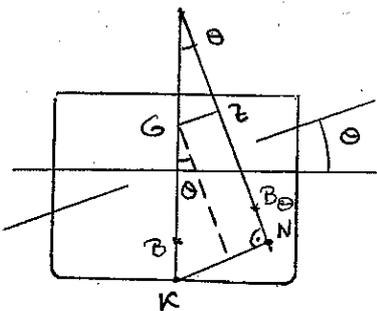
Caso particular en el que la altura metacéntrica, G_0M , fuese negativa.

En el caso de que un buque tuviese una altura metacéntrica negativa, pero que aún conservase alguna capacidad adrizante, la forma de la curva de brazos adrizantes sería la siguiente:



En este caso, aunque en el origen tenemos una situación de equilibrio ($\bar{GZ}=0$), al ser $\bar{G.M.} < 0$ el equilibrio es inestable, y el buque acabará escorándose hasta un ángulo θ_e (a babor o estribor), en el cual alcanza una nueva posición de equilibrio ($\bar{GZ}=0$), esta vez estable al ser la pendiente en ese punto positiva. No obstante, como los valores de \bar{GZ} entre 0 y θ_e serán muy pequeños, cualquier acción escorante, por pequeña que sea, hará que el buque se mueva. Al intervalo entre $\pm\theta_e$ se le llama de indiferencia, y en él el buque estará dando banderías.

Obtención.-

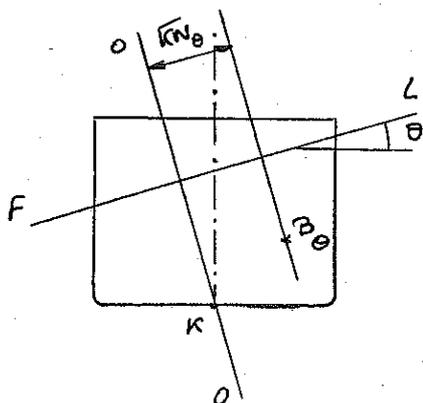


El método tradicional de obtención de la curva $\bar{GZ}-\theta$ se a partir de la familia de curvas auxiliares \bar{KN} . Así, por geometría

$$\bar{GZ}_\theta = \bar{KN}_\theta - \bar{KG} \times \text{sen } \theta.$$

Si además consideramos el efecto de las superficies libres

$$\bar{GZ}_\theta = \bar{KN}_\theta - \bar{KG} \times \text{sen } \theta - \frac{\Sigma m_i l_i}{\Delta}$$



Como se recordará, para obtener cada valor concreto de \bar{KN} se fijaba un ángulo de escora, θ . Se trataba la flotación FL , lo que nos dará por integración un volumen de carena, V , y un desplazamiento ($\Delta = \rho V$). \bar{KN} era la mínima distancia entre el plano auxi-

liar OO , perpendicular a la flotación y que pasa por K , y el c.d.c. B_0 correspondiente a la flotación Fl

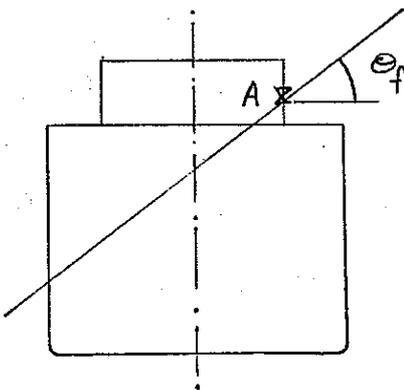
$$\bar{KN}_0 = f(\Delta, \theta)$$

Como vemos, \bar{KN} depende de la posición del c.d.c., B_0 , y como este punto varía según el ángulo de escora, pero también según el trimado, las curvas \bar{KN} también serán función del trimado

$$\bar{KN}_0 = f(\Delta, \theta, \text{trimado})$$

En los buques pequeños, como los pesqueros, o en aquellos en los que tenga una gran influencia el trimado, se calculan las curvas \bar{KN} para tres aientos diferentes, como mínimo, que corresponderán a los casos más probables que puedan presentarse.

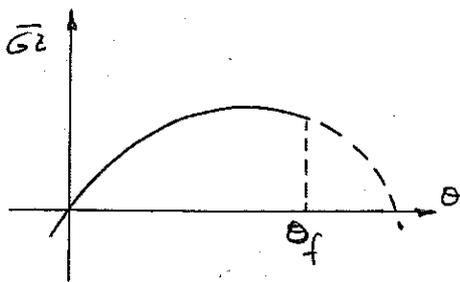
Ángulo de inundación progresiva.-



El ángulo de inundación progresiva, θ_f ó θ_i , es aquel ángulo de escora a partir del cual comienza a sumergirse la primera abertura considerada como no estanca del buque. Este ángulo dependerá de las condiciones de navegación; Δ , \bar{KG} y trimado.

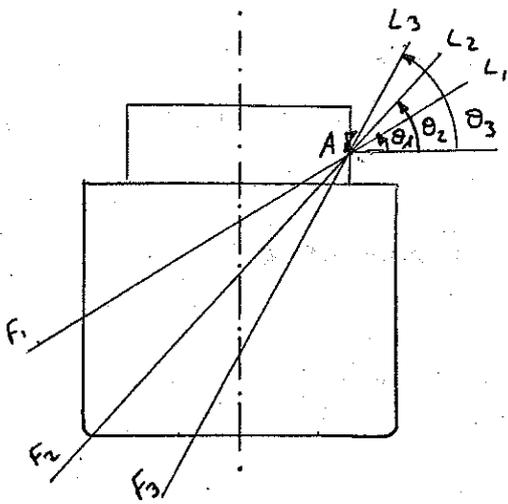
Precisamente es en los buques que tienen un cierto arrufo en la cubierta en los que el trimado es fundamental a la hora de determinar cuál es la primera abertura no

estanca. (punto A).

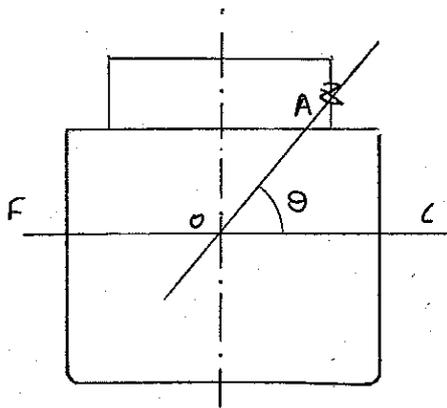
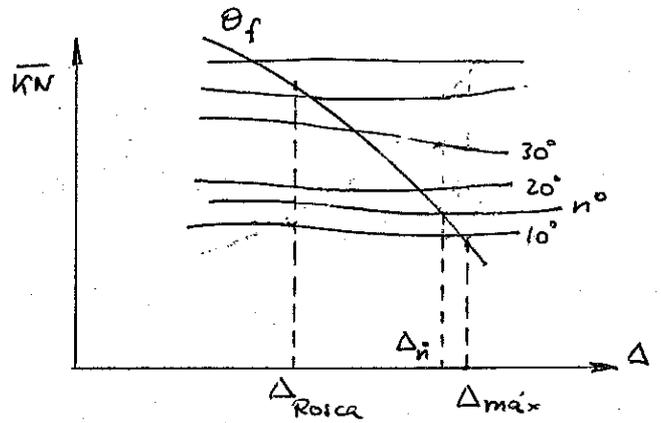
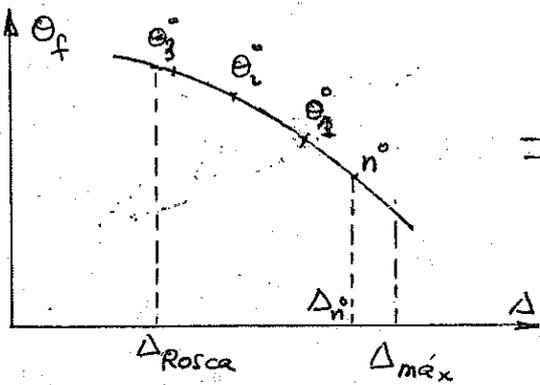


La Administración considera que a partir de este ángulo el buque pierde toda su capacidad adrizante, por lo que exige que las curvas GZ se interrumpan a partir de ese punto y se continúen con trazo discontinuo.

Obtención del ángulo θ_f :



- Fijado el trimado de estudio determinamos la primera abertura no estanca (punto A).
- Desde ese punto trazamos una serie de flotaciones FL a distintos ángulos.
- Para cada flotación integramos el volumen de carena, con lo que obtendremos distintos desplazamientos.
- Los desplazamientos obtenidos y su ángulo de escora correspondiente los llevamos a un diagrama $\theta_f - \Delta$.
- En la práctica estos valores se representan sobre las curvas \bar{KN} .



En algunos estudios se obtiene el ángulo θ_f partiendo de la flotación sin escora, FL , correspondiente al desplazamiento de la condición de carga que estamos considerando; y desde su intersección con el plano diametral (punto O), levantan la recta OA, uniendo ambos puntos en el plano correspondiente, con lo que obtienen un ángulo θ . Obviamente esto da lugar a valores inexactos.

Obviamente esto da lugar a valores inexactos.

Estudios de estabilidad.

Una de las utilizaciones de los diagramas de estabilidad es la determinación de los ángulos de escora en los cuales, cuando el buque se enfrenta a un momento escorante dado, alcanza las condiciones de equilibrio:

- Equilibrio estático: Posición en la que el momento escorante es igual al par adrizante.
- Equilibrio dinámico: Punto en el que la energía escorante se iguala con la energía adrizante.

En los diagramas estáticos lo que se hace, para mayor claridad, es superponer el momento escorante al par adrizante (lo que supone cambiar de signo al momento escorante). Así, en el equilibrio estático, la igualdad de momentos se obtiene inmediatamente sin más que leer directamente los ángulos correspondientes a aquellos puntos en los que las curvas se cortan (igualdad de ordenadas y por tanto de momentos). El equilibrio dinámico en estos diagramas viene representado por la igualdad de áreas.

En el caso de que estemos trabajando con brazos adrizantes, en lugar de momentos, como lo que hacemos es dividir por el desplazamiento (Δ), $\overline{GZ} = \frac{P_a}{\Delta}$, al momento escorante también hemos de dividirlo por Δ para que tenga la misma escala, y poder relacionarlos

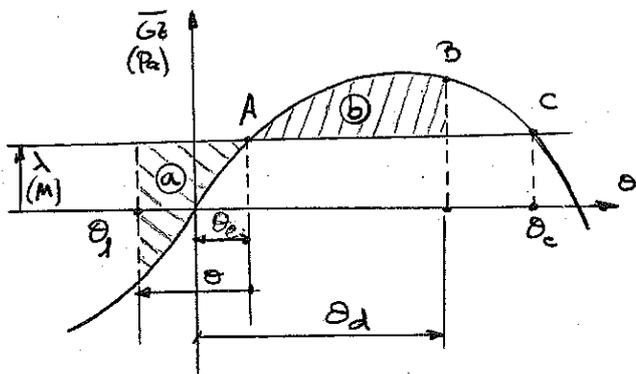
$$\lambda = \frac{M_{esc}}{\Delta}$$

A este λ se le llama brazo escorante, y no hay que confundirlo con el brazo de palanca, o mínima distancia entre las fuerzas del par escorante.

Para aclarar estos conceptos y ver cómo se obtendrían en el diagrama estático los puntos de equilibrio, veamos un ejemplo, de los múltiples que se pueden dar:

1.- Suponamos que un buque se encuentre sometido a un momento escorante M , por ejemplo producido por un viento, y que para simplificar vamos a suponer que es constante

$$M = \text{cte.} \Rightarrow \lambda = \text{cte.}$$



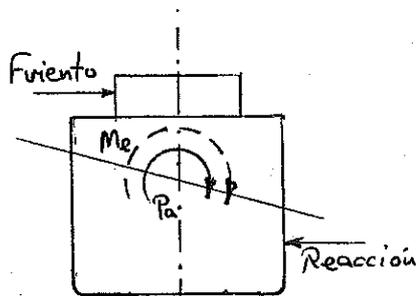
Viendo el diagrama observamos que hay dos puntos: A y C, en los cuales ambos brazos (ó momentos) son iguales, y por tanto donde se cumple la condición de equilibrio estático:

- En el punto A el equilibrio es estable (pendiente de la curva adrizante positiva), y nos permite obtener el ángulo de escora permanente θ_e .

- El punto C es el punto crítico porque a partir de él el equilibrio es inestable (los momentos escorantes siempre son mayores que los adrizantes).

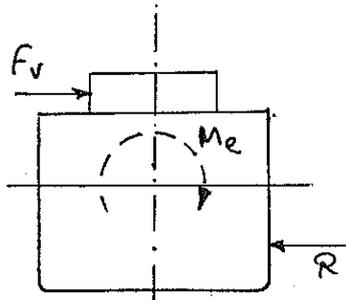
2- Supongamos ahora que el buque se encuentre en el punto A, como posición de partida, y que partiendo de este ángulo de escora permanente, oscila a barlovento un ángulo θ , dado, (θ es el ángulo de oscilación a partir de θ_e , y θ_e es el ángulo de escora que alcanza el buque - medido desde el origen). (El buque puede oscilar por la acción de las olas, por ejemplo). Cuando el buque recupere, ¿hasta qué ángulo θ_d llegará a sotavento? (Punto B de equilibrio dinámico).

La condición a imponer es que el trabajo del par escorante sea igual al trabajo del par adrizante. Ahora bien, mientras el buque esté escorado a barlovento el momento escorante y el par adrizante tienen el mismo sentido, por lo que sus energías se suman.



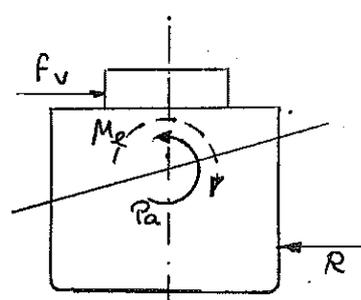
Barlovento

El momento escorante (M_e) y el adrizante (P_a) se suman para hacer girar al buque



Origen ($\theta=0$)

$$P_a = 0$$



Sotavento

El momento escorante y el adrizante se contraponen. El par adrizante trata de impedir que el buque siga girando.

Condición: $T_{rec} = T_{adr.} \rightarrow$

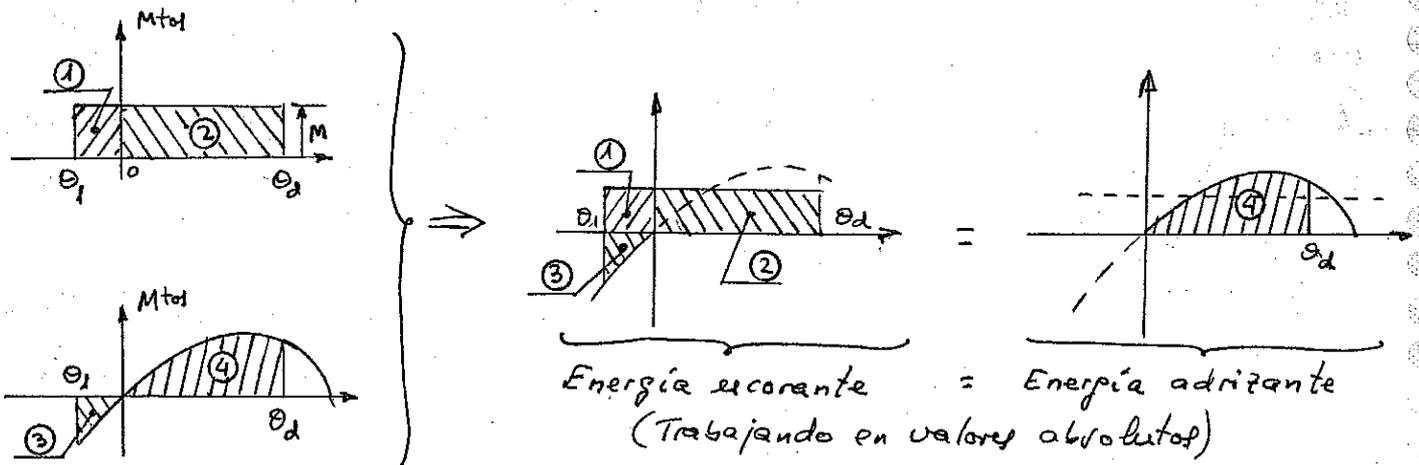
$$\left. \begin{aligned} T_{rec} &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta + \int_{\theta_1}^0 \Delta \cdot \bar{Gz} \cdot d\theta \\ T_{adr.} &= \int_0^{\theta_2} \Delta \cdot \bar{Gz} \cdot d\theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot d\theta + \int_{\theta_1}^0 \Delta \cdot \bar{Gz} \cdot d\theta = \int_0^{\theta_2} \Delta \cdot \bar{Gz} \cdot d\theta$$

Como en nuestro ejemplo M es constante

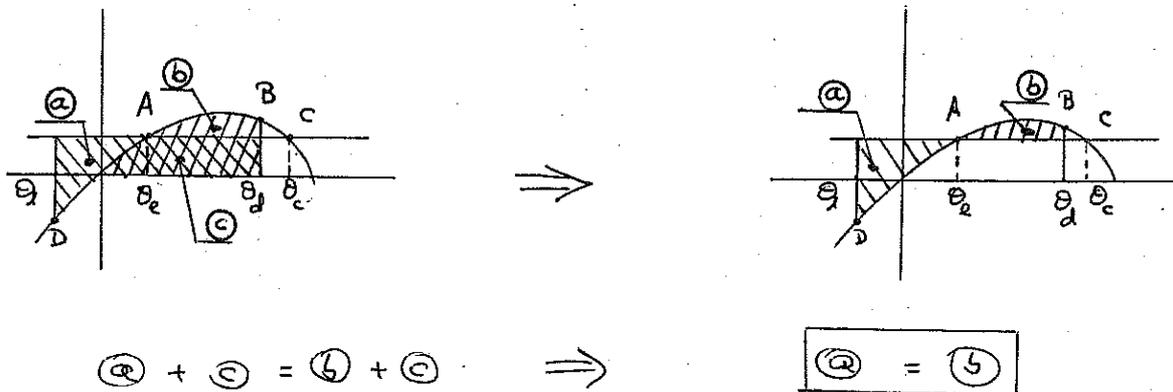
$$\underbrace{M [\theta_2 - \theta_1]}_{(1)} + \underbrace{M [\theta_2 - 0]}_{(2)} + \underbrace{\int_{\theta_1}^0 \Delta \cdot \bar{Gz} \cdot d\theta}_{(3)} = \underbrace{\int_0^{\theta_2} \Delta \cdot \bar{Gz} \cdot d\theta}_{(4)}$$

Estos integrales, en el diagrama estático vienen representados por áreas. Y llamando ①, ②, ③ y ④ a cada sumando, en orden consecutivo, tenemos

$$\boxed{① + ② + ③ = ④}$$



Si superponemos ambos miembros de la igualdad gráfica nos queda:



que es otra forma de expresar la condición de equilibrio dinámico, como igualdad

de áreas relativas.

Ⓒ → Se autoanula, puesto que se compensa

Ⓐ → Representa la energía "neta" que tiende a hacer escorar el barco

Ⓑ → Representa la energía efectiva adrizante, es decir, la parte de la reserva de estabilidad (área ABC) que se utiliza para contrarrestar la energía escorante Ⓐ.

Obviamente si trabajamos con brazos en vez de feres, el planteamiento es idéntico.

La situación crítica se produce cuando el área Ⓑ cubre toda la reserva de estabilidad, pues en este caso el punto B coincide con el C, que es el punto de equilibrio inestable, a partir del cual el buque zotobraría ($\theta_d = \theta_c$).

En la práctica el buque puede zotobrar antes, pues el ángulo de inundación progresiva, θ_f , suele ser inferior a este ángulo crítico.

Por lo que respecta a la solución de nuestro problema, cómo obtener el ángulo de equilibrio dinámico, θ_d , hay que calcular el ángulo que nos dé la igualdad de áreas (absolutas o relativas), lo cual requerirá un proceso tedious de aproximaciones sucesivas, o interpolaciones.

En resumen, podemos decir que los diagramas estáticos (feres o brazos), utilizados sin combinación con los dinámicos, presentan la ventaja de que la obtención de los puntos de equilibrio estático, o el ángulo de escora permanente, es inmediato. Por contra, su inconveniente es que obtener el ángulo de equilibrio dinámico puede ser bastante laborioso.

2.- DIAGRAMA DINÁMICO O CURVA DE BRAZOS DINÁMICOS, $\bar{b}_d - \theta$.-

Introducción.-

La estabilidad dinámica es el trabajo que hay que realizar contra el par adrizante para llevar al buque hasta un determinado ángulo de escora partiendo de la posición de equilibrio.

(Se desprecia cualquier otra resistencia, por ejemplo del aire, agua, etc.). Al ser un trabajo contra un par se trata, por tanto, de una energía potencial.

$$\text{Estabilidad dinámica} = \int_{\theta_0}^{\theta} P_a \cdot d\theta = \Delta \int_{\theta_0}^{\theta} \bar{GZ} \cdot d\theta \quad (\text{por ser } \Delta = \text{cte.})$$

Normalmente se partirá de la situación de adrizado, con lo que $\theta_0 = 0$.^(*) Esto en el diagrama estático representa el área de la curva adrizante hasta un determinado ángulo.

Como lo normal es trabajar con brazos en vez de pares, llamamos brazo dinámico, \bar{b}_d , a la integral de brazos adrizantes

$$\bar{b}_d = \int_{\theta_0}^{\theta} \bar{GZ} \cdot d\theta$$

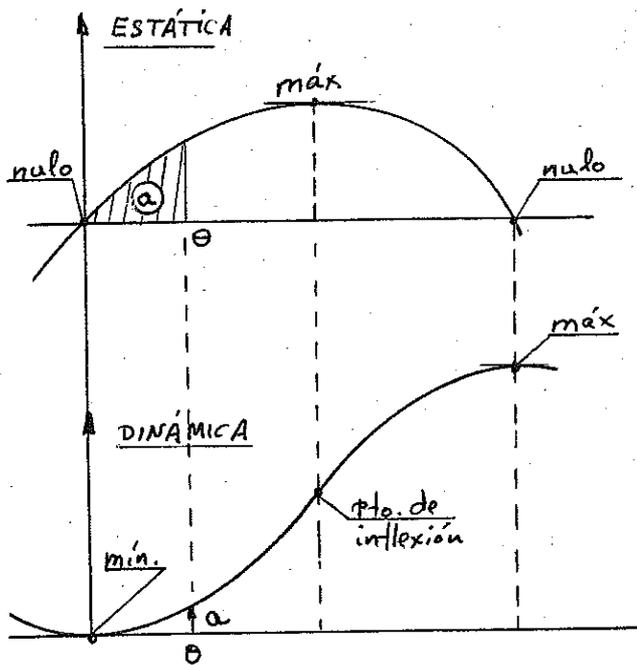
Suponiendo, como es lo normal, $\theta_0 = 0$, el brazo dinámico correspondiente a un ángulo θ , dado, viene representado por el área encerrada por la curva de \bar{GZ} hasta ese ángulo. El diagrama dinámico, por tanto, no es más que la representación gráfica de la estabilidad dinámica, o del brazo dinámico, en función del ángulo de escora θ . Así, el área de la curva \bar{GZ} hasta un ángulo θ , estará representado por una simple ordenada en la curva de brazos dinámicos en esa abscisa θ .

Si como hemos dicho, la función de brazos dinámicos se obtiene integrando los brazos estáticos, la relación inversa también se cumplirá, es decir, los brazos adrizantes se corresponderán con la representación de la derivada de la función de brazos dinámicos

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{b}_d}{d\theta} &= \bar{GZ} \\ \frac{d^2\bar{b}_d}{d\theta^2} &= \frac{d\bar{GZ}}{d\theta} \end{aligned} \right\}$$

*) Si el buque no estuviese adrizado $\theta_0 = \theta_e$ (ángulo de escora permanente).

Según esto:



a) En el origen:

$$\begin{cases} \bar{Gz} = 0 = \frac{d\bar{y}_d}{d\theta} \\ \frac{d\bar{Gz}}{d\theta} = \frac{d^2\bar{y}_d}{d\theta^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

En la curva dinámica tendremos un mínimo.

b) Para \bar{Gz} máximo

$$\frac{d\bar{Gz}}{d\theta} = \frac{d^2\bar{y}_d}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow$$

En la curva dinámica tendremos un punto de inflexión.

c) Ángulo límite:

$$\begin{cases} \bar{Gz} = 0 = \frac{d\bar{y}_d}{d\theta} \\ \frac{d\bar{Gz}}{d\theta} = \frac{d^2\bar{y}_d}{d\theta^2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{En la curva dinámica corresponderá un máximo.}$$

Obtención.

Como ya se ha comentado, para obtener cada ordenada de la curva dinámica debemos calcular la correspondiente integral de la curva estática. Ahora bien, en la práctica no se suele conocer la función analítica de la curva $\bar{Gz} = f(\theta)$, sino que solamente se conocen valores discretos. En estos casos debemos utilizar un método de integración aproximado. El método que siempre se utiliza es el de Simpson.

Para utilizar este método debemos tener en cuenta que necesitamos un mínimo de tres ordenadas y un intervalo entre ordenadas (h) uniforme.

Una situación muy corriente es que este intervalo sea de 10° , que expresado en radianes

$$h = 10 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18} \text{ rad.}$$

Veamos cómo se obtendrían las distintas ordenadas de la curva dinámica:

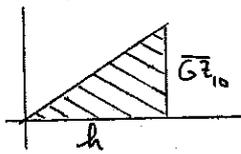
1.- $\bar{b}d_{10}$ (intervalo $0^\circ - 10^\circ$)

a) Si conocemos el valor de $\bar{G}z_0$, bien porque es dato (en los buques pequeños el intervalo hasta 40° se suele dar cada 5°), o bien por interpolación gráfica de la curva $\bar{G}z - \theta$

$$\bar{b}d_{10} = \int_0^{10} \bar{G}z \cdot d\theta \rightarrow \bar{b}d_{10} = \frac{(h/2)}{3} [1 \cdot \bar{G}z_0 + 4 \cdot \bar{G}z_5 + 1 \cdot \bar{G}z_{10}]$$

(lo normal es que $\bar{G}z_0 = 0$)

b) Si no tenemos posibilidad de conocer el valor de $\bar{G}z_5$, el área de la curva $\bar{G}z$ entre 0° y 10° la podemos aproximar a un triángulo.



$$\bar{b}d_{10} = \frac{1}{2} \cdot h \times \bar{G}z_{10}$$

2.- $\bar{b}d_{20}$ (intervalo $0^\circ - 20^\circ$)

$$\bar{b}d_{20} = \frac{h}{3} [\bar{G}z_0 + 4 \cdot \bar{G}z_{10} + \bar{G}z_{20}]$$

3.- $\bar{b}d_{30}$ (intervalo $0^\circ - 30^\circ$)

$$\bar{b}d_{30} = \frac{3}{8} h [\bar{G}z_0 + 3 \cdot \bar{G}z_{10} + 3 \cdot \bar{G}z_{20} + \bar{G}z_{30}]$$

4.- $\bar{b}d_{40}$ (intervalo $0^\circ - 40^\circ$)

Se puede hacer directamente: $\bar{b}d_{40} = \frac{h}{3} [\bar{G}z_0 + 4 \cdot \bar{G}z_{10} + 2 \cdot \bar{G}z_{20} + 4 \cdot \bar{G}z_{30} + \bar{G}z_{40}]$

que quizás sea lo más preciso por los errores debidos al redondeo, pero si ya hemos calculado el $\bar{b}d_{20}$, tal vez resulte más cómodo hacer:

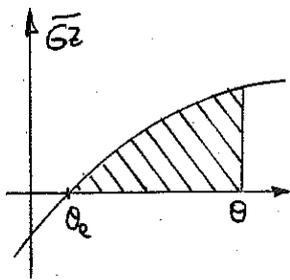
$$\bar{b}d_{40} = \bar{b}d_{20} + \frac{h}{3} [\bar{G}z_{20} + 4 \cdot \bar{G}z_{30} + \bar{G}z_{40}]$$

5.- $\bar{b}d_{50}$ (intervalo $0^\circ - 50^\circ$)

$$\bar{b}d_{50} = \frac{3}{8} h [\bar{G}z_0 + 3 \cdot \bar{G}z_{10} + 3 \cdot \bar{G}z_{20} + \bar{G}z_{30}] + \frac{h}{3} [\bar{G}z_{30} + 4 \cdot \bar{G}z_{40} + \bar{G}z_{50}]$$

$$\text{ó } \bar{b}d_{50} = \bar{b}d_{30} + \frac{h}{3} [\bar{G}z_{30} + 4 \cdot \bar{G}z_{40} + \bar{G}z_{50}]$$

Etc.



En caso de que el buque tuviera un ángulo de escora permanente θ_e , la curva de brazos adrizantes "efectiva" ya no parte del origen ($\theta_0 \neq 0$), y en este caso el brazo dinámico correspondiente a un ángulo θ cualquiera será:

$$\bar{b}_d = \int_{\theta_e}^{\theta} \bar{G}_z \times d\theta.$$

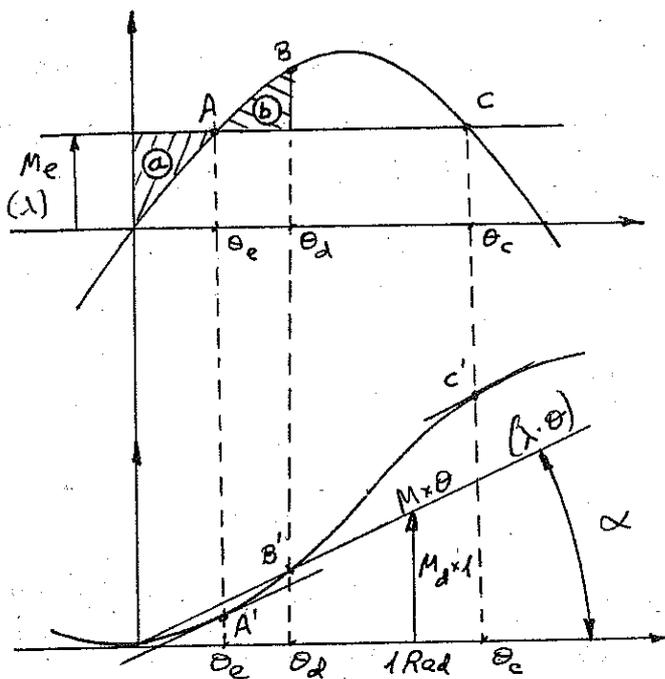
Equilibrio estático y dinámico.

Según hemos visto, $\frac{d\bar{b}_d}{d\theta} = \bar{G}_z$. Esto quiere decir que dos puntos distintos que tengan el mismo brazo estático, en estabilidad dinámica tendrán la misma derivada, y en el diagrama dinámico (representación gráfica) la misma pendiente en sus tangentes. En consecuencia:

- Dos puntos distintos A y B, en los que $\bar{G}_z_A = \bar{G}_z_B$, en la curva de brazos dinámicos sus rectas tangentes tendrán la misma pendiente, o dicho con otras palabras, serán paralelas.
- En la condición de equilibrio estático con un brazo escorante, $\bar{G}_z_A = \lambda_A$, en el diagrama dinámico solo significa que para el ángulo correspondiente, θ_A , la tangente a la curva de brazos dinámicos adrizantes y la tangente a la curva de brazos dinámicos escorantes son paralelas (misma derivada). No se cortan.

Por lo que respecta al equilibrio dinámico, en el diagrama estático, para obtener los puntos que cumplirán una determinada condición habrá que averiguar para qué ángulo se obtiene la igualdad de áreas (absolutas o relativas). En el diagrama dinámico esta condición de equilibrio vendrá dada por una igualdad de ordenadas (absolutas o relativas), lo que evidentemente resulte mucho más fácil.

Veamos un ejemplo sencillo para aclarar todo esto. Supongamos un buque, inicialmente adrizado, al que de repente le se le somete a un momento escorante constante producido por un viento. Se pide determinar todos los ángulos de equilibrio en el diagrama dinámico.



En el diagrama estático, un momento constante se representa con una recta horizontal.

En el diagrama dinámico, el trabajo de un momento constante viene dado por

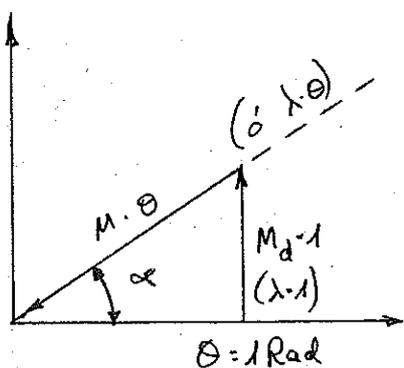
$$T_r = \int_0^{\theta} M \times d\theta \rightarrow T_r = M \cdot \theta$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el origen, y cuya pendiente es

$$\frac{dT_r}{d\theta} = M = \tan \alpha$$

Ahora bien, M tiene unidades ($Tm \times m$), mientras que $\tan \alpha$, en sentido estricto es adimensional. Esto supone que, aunque M_e y M_d físicamente son la misma cosa ($M_e = M_d = M$), su representación gráfica variará según los diferentes factores de escala empleados en los diagramas estático y dinámico, y que a su vez son totalmente arbitrarios.

En consecuencia, uno de los primeros pasos que debemos hacer es determinar cuál es nuestro ángulo α (grados) particular en el diagrama dinámico (que como ya queda dicho dependerá de los factores de escala que hayamos elegido para representar el brazo dinámico, o la estabilidad dinámica, y el ángulo de escora θ). Para ello el procedimiento que le sigue es el siguiente:



- Por la abscisa $\theta = 1$ radian levantamos una ordenada $M_d \cdot 1$ Rad, utilizando las escalas que hayamos considerado.

- Unimos el extremo de este segmento con el origen, con lo que dibujamos la recta $M \cdot \theta$ ($\lambda \cdot \theta$), que nos delimita el ángulo α buscado.

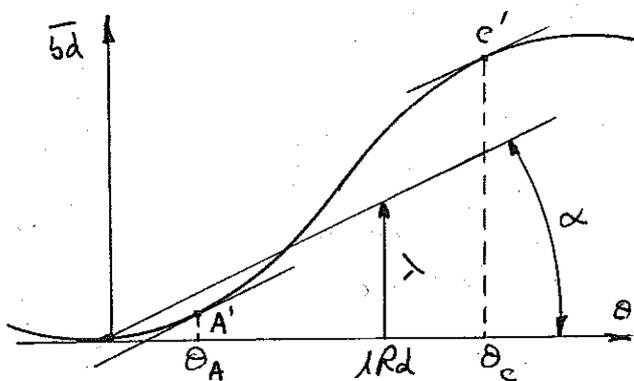
Con el ángulo α ya conocemos la pendiente, que en nuestro diagrama dinámico particular, nos permitirá buscar las distintas tangentes geométricas que necesitaremos.

Obviamente, si en vez de trabajar con momentos trabajáramos con brazos (\bar{Gz} y λ) el procedimiento es totalmente análogo.

Volviendo a nuestro ejemplo, veamos cómo obtendríamos los puntos A' y C' de equilibrio estático utilizando sólo el diagrama dinámico.

La condición a imponer es que $\bar{Gz}_A = \bar{Gz}_C = \lambda = \frac{d\bar{Gd}}{d\theta} = \text{tg } \alpha$ (o' $P_{A'} = P_{C'} = M$), por lo que los puntos A' y C' al tener la misma derivada, sus rectas tangentes deben tener la misma pendiente.

La solución gráfica consiste en:



1º Determinar el ángulo α según el procedimiento ya comentado

2º Encontrar los puntos A' y C' de la curva dinámica cuya recta tangente tiene esa pendiente α (rectas paralelas)

Como vemos este procedimiento de encontrar dos puntos a base de escuadra y cartabón es muy impreciso; en el diagrama estático se conseguiría de una forma mucho más rápida y exacta.

Para obtener el punto B' de equilibrio dinámico en este diagrama imponemos la condición

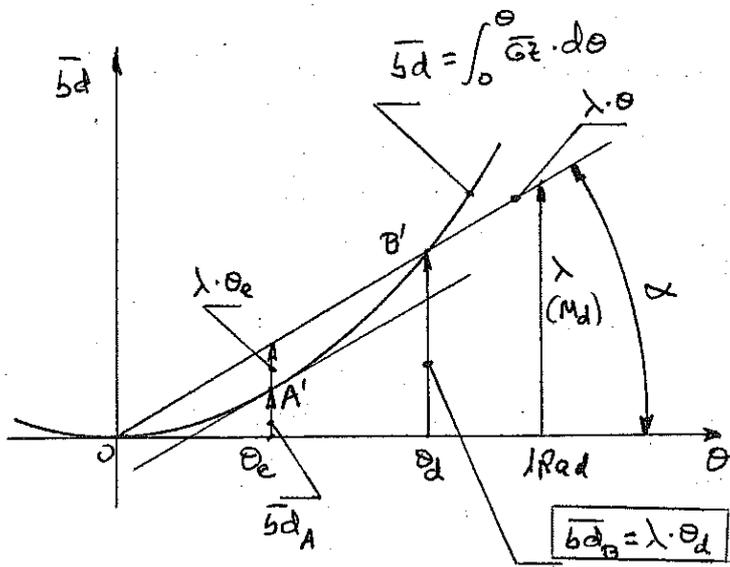
Trabajo excorante = Trabajo adrizante o'

brazo dinámico excorante = brazo dinámico adrizante

lo que representa la igualdad de ambas áreas absolutas en el diagrama estático. En nuestro ejemplo concreto partimos del origen



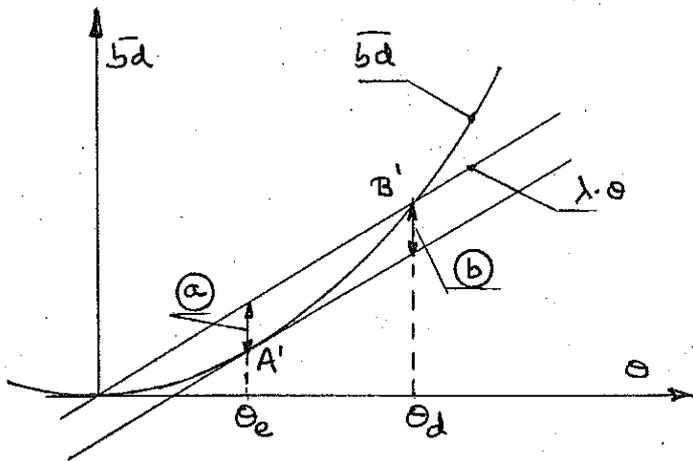
Con lo que el procedimiento para conocer el equilibrio dinámico es:



1º Obtenemos el valor de α , y en este caso el brazo dinámico excéntrico, $\lambda \cdot \theta$, levantando la ordenada λ (σM_D) en $\theta = 1$ radian.

2º El punto B' buscado de equilibrio dinámico, en el que los valores de \overline{sd} y $\lambda \cdot \theta$ se igualan será el punto de corte de ambas curvas.

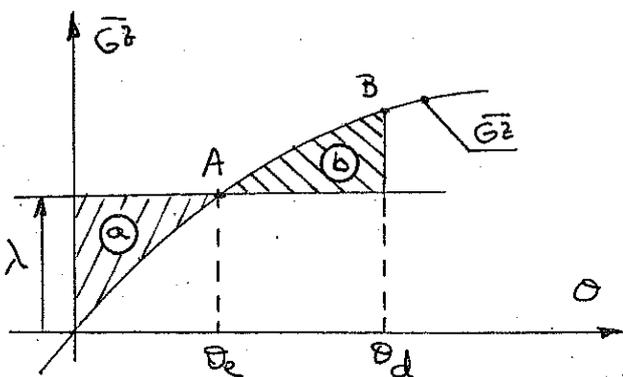
Si lo que queremos es conocer las áreas relativas $\textcircled{a} = \textcircled{b}$ utilizando únicamente el diagrama dinámico:



1º Una vez obtenido el ángulo α y la recta $\lambda \cdot \theta$, se determina el punto A' mediante la condición de tangencia. El valor de \textcircled{a} es el segmento que va desde la vertical del punto A' , en la curva de brazos dinámicos, hasta la recta $\lambda \cdot \theta$.

2º El valor de \textcircled{b} es el segmento de ordenada que va desde la recta que es tangente en A' hasta el punto B' , intersección de la curva \overline{sd} y la recta $\lambda \cdot \theta$ (ángulo θ_d).

En efecto, si vemos el diagrama estático:



- El valor de \textcircled{a} es $\textcircled{a} = \lambda \cdot \theta_e - \overline{sd}_A$ que es precisamente el segmento \textcircled{a} en el diagrama dinámico.

- El valor de \textcircled{b} es

$$\textcircled{b} = [\overline{sd}_B - \overline{sd}_A] - [\lambda \cdot \theta_d - \lambda \cdot \theta_e] \rightarrow$$

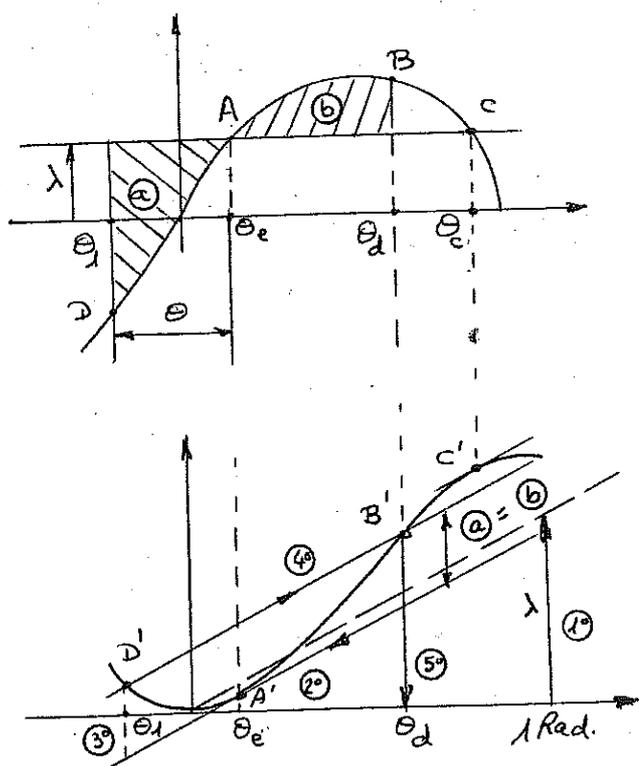
$$\textcircled{b} = [\overline{sd}_B - \lambda \cdot \theta_d] + [\lambda \cdot \theta_e - \overline{sd}_A]$$

Ahora bien, $\bar{b}d_B - \lambda \cdot \theta_d = 0$, ya que es la condición de equilibrio dinámico en θ_d . Por tanto

$$\textcircled{5} = 0 + \lambda \cdot \theta_e - \bar{b}d_A = \textcircled{2}$$

En conclusión, y según estamos viendo, el diagrama dinámico es muy impreciso para determinar los puntos de equilibrio estático, lo que representa su principal inconveniente. Por contra, presenta la ventaja de que para encontrar el punto que cumple una determinada condición de equilibrio dinámico sólo hay que buscar una ordenada (absoluta o relativa).

Veamos otro ejemplo. El que planteábamos al comentar el diagrama estático: Dado un momento excéntrico constante, suponemos que, partiendo del punto de equilibrio permanente, se produce una oscilación de θ grados a barlovento. Determinar el ángulo máximo de eureka que alcanzará el buque al recuperar a lotavento.



Si utilizamos ambos diagramas a la vez, el procedimiento sería el siguiente:

1º En el diagrama estático trazamos la recta horizontal de altura λ (ó.M), con lo cual determinamos los puntos A y C, con sus respectivos ángulos θ_e y θ_c

2º Estos ángulos θ_e y θ_c los llevamos al diagrama dinámico y obtenemos de forma inmediata los puntos A' y C'. Asimismo, al ser dado el ángulo θ de balance podemos determinar los puntos D y D' en cada diagrama.

3º En el diagrama dinámico determinamos el ángulo α , para lo cual por $\theta = 1 \text{ Rad.}$ levantamos la ordenada $\lambda \cdot 1$, y este punto lo unimos con el origen $\textcircled{1}$. (Si no nos hubié-

semos apoyado en el diagrama estático para obtener los ángulos θ_e y θ_c , habría que obtenerlos en el dinámico buscando los puntos A' y C' que son tangentes).

4º Por A', correspondiente a θ_e , trazamos la recta de pendiente $\tan \alpha$ (paralela a la anterior), y que tendrá que ser tangente a la curva dinámica en ese punto $\textcircled{2}$

5% Por el punto D' , obtenido a partir de Θ (dato) o Θ_1 (3), trazamos otra paralela (4)

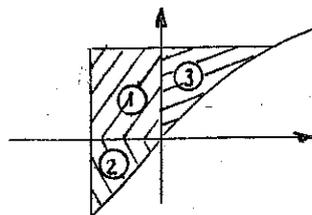
5% El punto de intersección, B' , de esta última recta con la curva dinámica, nos da el ángulo de equilibrio dinámico, Θ_d , que nos pedían (5).

La distancia vertical que hay entre la recta $D'B'$ y su paralela (la recta tangente a la curva dinámica en A'), es precisamente la magnitud de las áreas relativas (a) = (b). Veamos la justificación.

• Área (a)

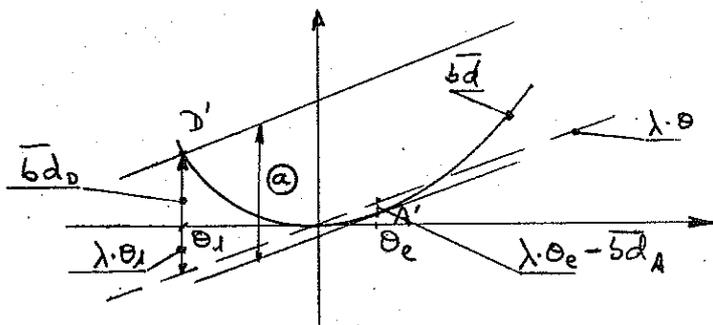
En el diagrama estático vemos que

$$(a) = \underbrace{\lambda \cdot \Theta_1}_{(1)} + \underbrace{\bar{b}d_B}_{(2)} + \underbrace{(\lambda \cdot \Theta_e - \bar{b}d_A)}_{(3)} \rightarrow (a) = (1) + (2) + (3)$$



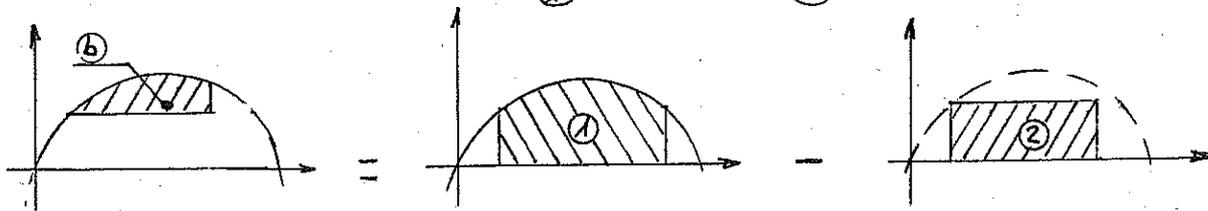
Agrupando los términos por ángulos para poder operar en el diagrama dinámico

$$(a) = [\lambda \cdot \Theta_1 + \bar{b}d_B] + [\lambda \cdot \Theta_e - \bar{b}d_A]$$



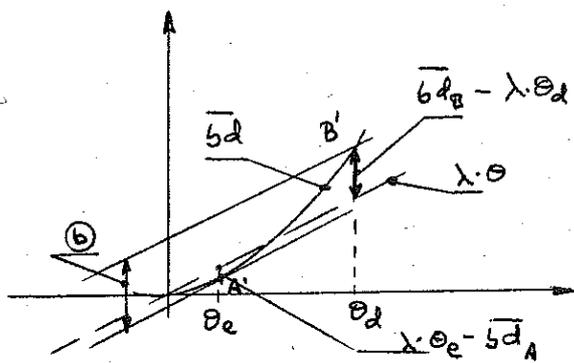
• Área (b)

En el diagrama estático (b) = $[\frac{\bar{b}d_B - \bar{b}d_A}{(1)}] - [\frac{\lambda \cdot \Theta_d - \lambda \cdot \Theta_e}{(2)}] \rightarrow (b) = (1) - (2)$



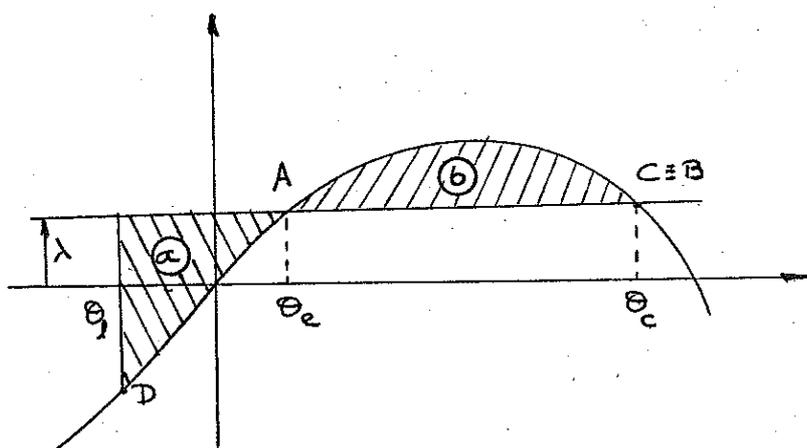
Agrupando por ángulos

$$(b) = [\bar{b}d_B - \lambda \cdot \Theta_d] + [\lambda \cdot \Theta_e - \bar{b}d_A]$$



Otra variante de este problema podría ser: Partiendo de las mismas condiciones iniciales, ¿cuál es el ángulo máximo que puede escoger el buque a barlovento sin que rotobre al recuperar a sotavento?

En este caso lo que nos están pidiendo es el ángulo θ_1 límite, tal que al recuperar, la energía escorrente agote toda la reserva de estabilidad, es decir, el caso extremo en el que el punto B de equilibrio dinámico coincide con el punto crítico C.



La condición a imponer es la igualdad de áreas

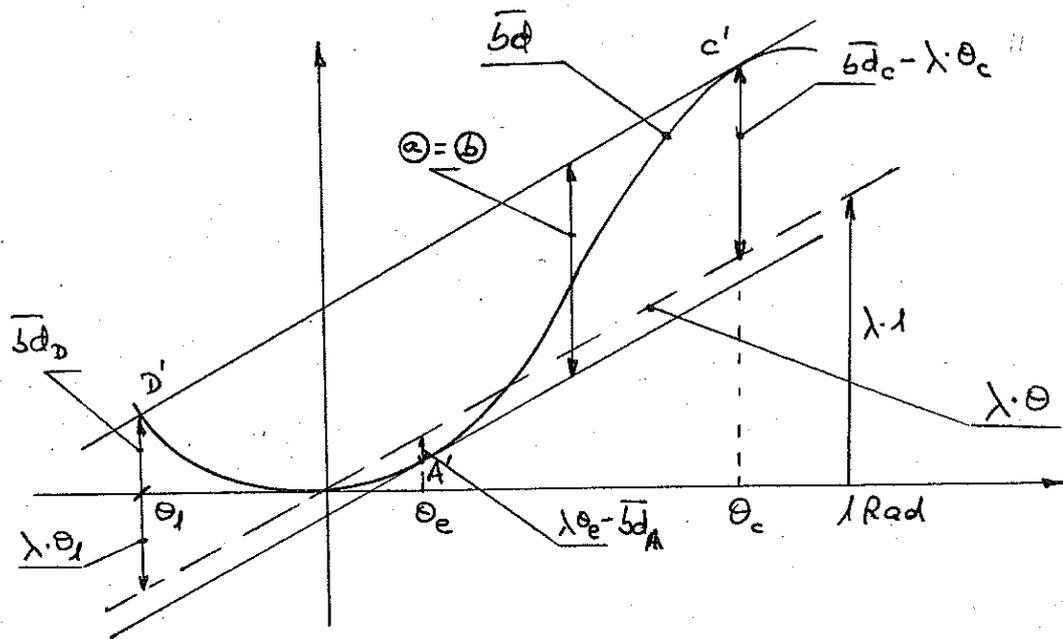
$$\textcircled{2} = \textcircled{5}$$

El procedimiento de obtención es análogo al del caso anterior:

1º Si tenemos la posibilidad de apoyarnos en el diagrama estático, trazamos la recta horizontal de altura λ . Esto nos permite obtener de forma inmediata los puntos A y C, con sus respectivos ángulos θ_e y θ_c . Con estos ángulos vamos al diagrama dinámico y obtenemos los puntos A' y C' correspondientes.

En el caso de que no pudiéramos apoyarnos en el diagrama estático, los puntos A' y C' habría que obtenerlos buscando la condición de tangencia según el procedimiento ya descrito.

- 2º En el diagrama dinámico determinemos el ángulo α de la forma habitual
- 3º Por los puntos A' y C' trazemos las rectas tangentes a la curva de brazos dinámicos; su pendiente corresponderá con la obtenida en el punto anterior, y por tanto ambas rectas serán paralelas.
- 4º El punto D', y su ángulo correspondiente θ_1 , que era la incógnita, es el punto de corte de la recta tangente que pasa por C' con la curva de brazos dinámicos.



La distancia vertical entre las paralelas que pasan por A' y C', respectivamente nos dará el valor de $\textcircled{a} = \textcircled{b}$

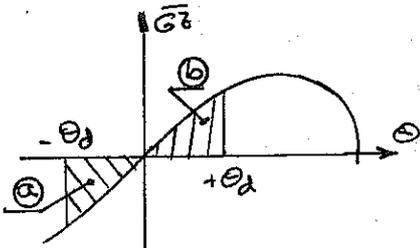
La justificación del procedimiento la dejamos como ejercicio.

ESTUDIO DE ALGUNOS MOMENTOS ESCORANTES:

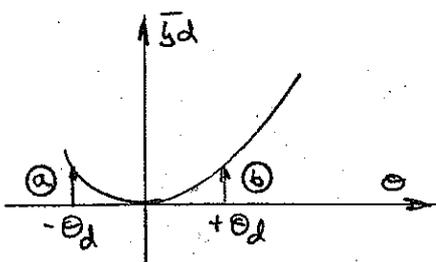
1. Efecto del viento y balance.

Vamos a considerar tres casos posibles que nos pueden resultar de interés.

1.1. Balance solo.



En este caso suponemos que el buque sufre una oscilación, por ejemplo por la acción de las olas, pero sin que actúe un momento escorante propiamente dicho, hasta un ángulo $-\theta_d$



Suponiendo que el buque está inicialmente adrizado, que la curva GZ tiene simetría impar y las simplificaciones habituales de despreciar las diversas resistencias, se verificará que:

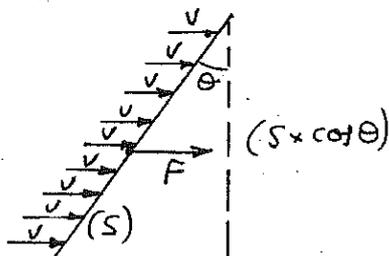
$$(a) = (b) \quad \text{y} \quad \theta_d = -\theta_d$$

1.2. Viento lateral con balance.

Consideraciones previas. - El viento, al encontrar un obstáculo en su camino ejercerá una presión sobre él. Esta presión es una función de la velocidad con la que esté soplando $P = f(v)$

Existen diversas expresiones, más o menos empíricas, de esta función. Algunas de ellas consideran que la presión es uniforme, mientras que otras consideran que la velocidad del viento varíe con la altura, con lo que la presión será distinta para cada altura.

Si consideramos una superficie S , la fuerza debida al viento será el producto de la presión por el área de la superficie efectiva expuesta al viento: (proyección sobre un plano perpendicular a la dirección del viento de la superficie S)

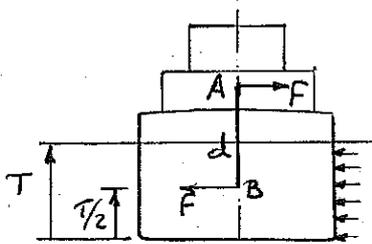


$$F = P \cdot S \cdot \cos \theta$$

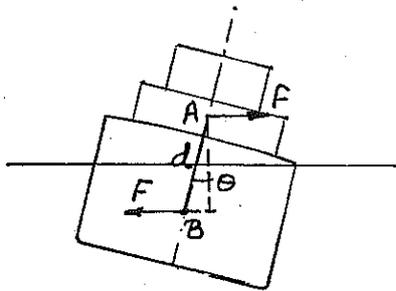
Si la velocidad del viento se considere uniforme, el punto de aplicación de esta fuerza estará en el baricentro, o c.d.p. de la superficie expuesta al viento.

En el caso de un buque, si suponemos que la velocidad del viento permanece paralela en todo momento al plano de la flotación, e incidiendo transversalmente al buque, inicialmente la superficie expuesta al viento, S , será la proyección de los diversos volúmenes (obra muerta más superestructuras) sobre el plano diametral. Sin embargo, a medida que el buque vaya escorándose habrá que proyectar, a su vez, esta superficie S sobre un plano perpendicular a la dirección del viento (como ya se ha dicho antes), con lo que nos queda $S \times \cos \theta$, siendo θ el ángulo de escora.

Por otro lado, para que exista momento es necesario que a la acción del viento se le oponga una reacción igual y contraria. El encargado de ejercer esta reacción es el agua sobre la obra viva. Su



punto de aplicación estaría en el centro de deriva; no obstante, lo normal es simplificar y suponer que se encuentra en un punto fijo sobre el plano diametral, a una altura sobre la quilla igual a la mitad del calado (con el buque adrizado).



A medida que el buque vaya escorándose, el brazo de palanca será la proyección de la distancia d , que separa ambos puntos de aplicación. (Por tanto, vemos que habrá dos proyecciones: una de la superficie expuesta al viento y otra del brazo de palanca).

El momento escorante será

$$M_e = F \times d \times \cos \theta$$

Substituyendo el valor de F

$$M_e = P \times S \times d \times \cos^2 \theta$$

y el brazo escorante

$$\lambda = \frac{M_e}{\Delta} = \frac{P \times S \times d}{\Delta} \times \cos^2 \theta$$

Así, por ejemplo, en el criterio de la Marine Americaine para rachas de viento

y balance, la expresión del brazo escorante que utiliza es

$$\lambda = \frac{0,0035 \cdot V^2 \cdot S \cdot d}{2240 \cdot \Delta} \cdot \cos^2 \theta \quad (\text{pies})$$

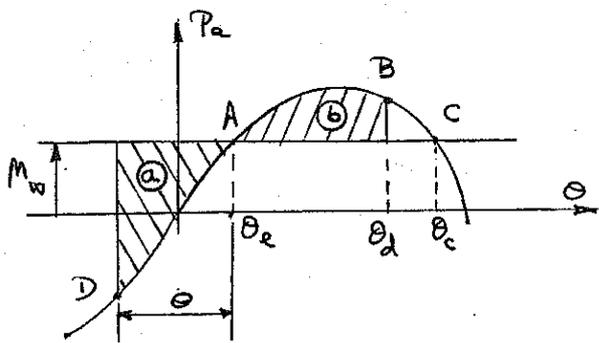
con S en pies^2 y Δ en tonf ($1 \text{ tonf} = 1,016 \text{ Tm} = 9964 \text{ N}$)

Una simplificación comúnmente aceptada consiste en suponer que el momento escorante es constante a lo largo de toda la escora, e igual a su valor máximo.

$$\theta = 0 \rightarrow \cos^2 \theta = 1 \rightarrow M_e = P \cdot S \cdot d \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{P \cdot S \cdot d}{\Delta}$$

Momento escorante constante con balance.

El planteamiento es el ya conocido. Suponemos un viento que produce al buque un momento escorante, M_w , constante a lo largo de toda la escora. Una vez alcanzado el equilibrio estático (punto A), se produce un balance a barlovento de θ , desde ese punto de equilibrio. Cuando el buque recupere a sotavento lo hará hasta un ángulo de escora θ_d en el que se alcance la condición de equilibrio dinámico (punto B).



Los datos de partida serían M_w y θ . Con M_w obtendríamos el punto A, con su ángulo θ_e , y a partir de él el punto D con el ángulo θ_d de balance.

Una vez obtenidos estos datos previos, podemos calcular el ángulo de equilibrio dinámico, θ_d , según los procedimientos ya comentados.

En este caso la condición a imponer para el criterio de estabilidad sería

$$\theta_d < \theta_c \quad \text{y} \quad \theta_d < \theta_f.$$

1.3.- Viento lateral con balance y una racha de viento.

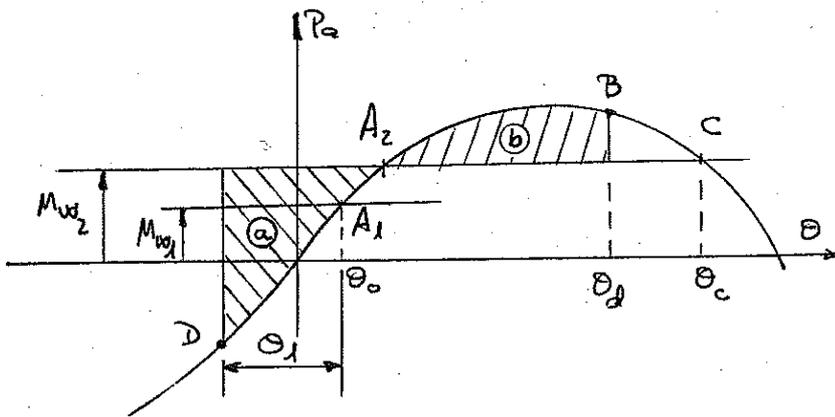
Sea un buque sometido a un momento escorante inicial M_{w1} , el cual tendrá un punto A_1 de equilibrio permanente (ángulo de escora correspondiente θ_0). Supongamos:

- 1º Que a partir de este punto A_1 se produce una oscilación a barlovento de θ_1 . (punto D)
- 2º Que cuando el buque ha alcanzado esta nueva posición se superpone una ráfaga de viento, aumentando el momento escorante hasta M_{w2} .

El problema como siempre consiste en determinar el punto B de equilibrio dinámico. En este caso también vamos a simplificar el problema considerando que los dos momentos escorantes se mantienen constantes.

La resolución sería:

-En el diagrama estático.-



a) Trazamos la recta M_{w1} , con lo que obtenemos el punto de intersección A_1 con su ángulo de equilibrio estático θ_0 .

b) A partir de θ_0 , y con θ_1 (dato) obtenemos el punto D.

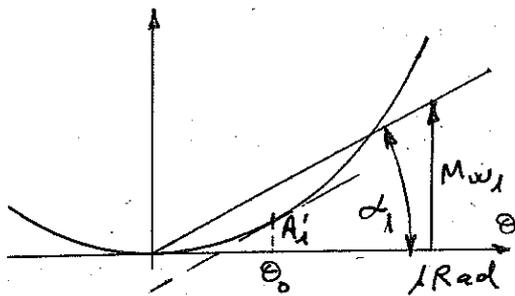
c) Trazamos la recta M_{w2} , con lo que obtenemos el nuevo punto de equilibrio estático A_2 . Con estos datos ya podemos calcular el área @.

d) A base de tanteos o interpolaciones debemos encontrar el punto B, con su ángulo θ_2 de equilibrio dinámico; para ello imponemos la condición de igualdad de las áreas relativas: $@ = \textcircled{b}$, o absolutas.

d) A base de tanteos o interpolaciones debemos encontrar el punto B, con su ángulo θ_2 de equilibrio dinámico; para ello imponemos la condición de igualdad de las áreas relativas: $@ = \textcircled{b}$, o absolutas.

- En el diagrama dinámico.-

a) Si lo utilizamos en combinación con el diagrama estático, determinamos en éste, el punto de intersección A_1 y su ángulo θ_0 correspondiente. Este ángulo lo llevamos a continuación al diagrama dinámico y obtenemos el punto A'_1 .

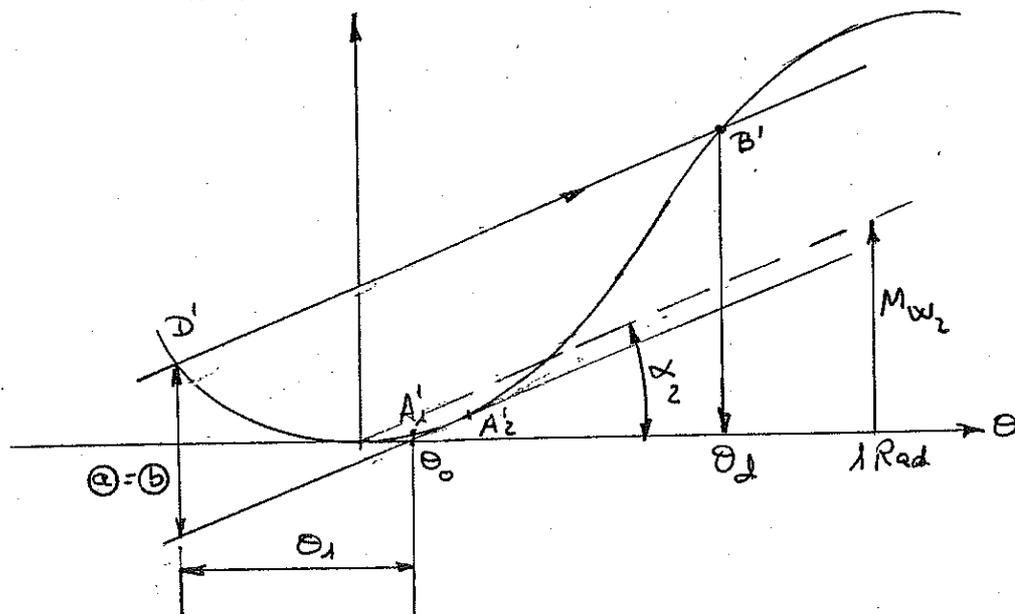


Si lo que utilizamos es únicamente el diagrama dinámico, tendremos que determinar el ángulo α_1 correspondiente a M_{w1} , y con esta pendiente localizar el punto de tangencia A'_1 con el procedimiento habitual. Este punto A'_1 nos dará el ángulo θ_0 de

partida.

b) Desde θ_0 llevamos el intervalo θ_1 hacia barlovento, con lo que obtenemos el punto D'

c) De forma análoga al apartado a) obtenemos el punto A'_2 . Si sólo utilizásemos el diagrama dinámico habría que obtener, por tanto, la nueva pendiente α_2 , correspondiente a M_{w2} , y con ella el nuevo punto de tangencia a la curva dinámica A'_2 .



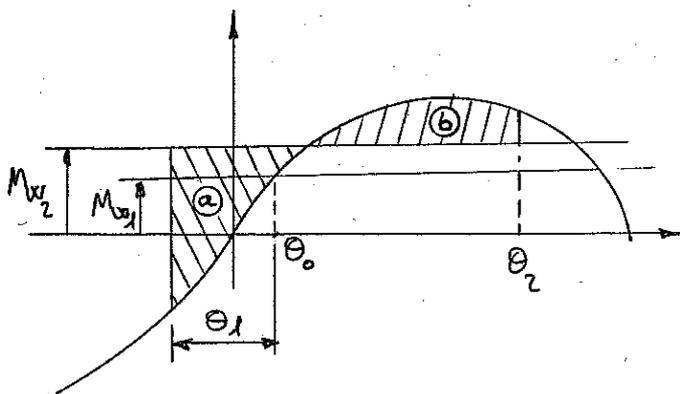
d) Por el punto D' levantamos una recta paralela, de pendiente α_2 . El punto de corte con la curva dinámica será el punto B' buscado, cuyo ángulo θ_d será el de equilibrio dinámico. La distancia vertical entre las paralelas de D'B' y A'Z es el valor de las áreas relativas $\textcircled{a} = \textcircled{b}$

La condición a imponer para el criterio de estabilidad es, como ya hemos comentado, que

$$\theta_d < \theta_c \quad \text{y} \quad \theta_d < \theta_f.$$

Estudios a realizar según la Administración.

En el caso de que en la condición de carga más desfavorable de un buque, el $bd_{30} < 0,065 m \times red$, la Administración exige que se haga todo el estudio que hemos comentado en este punto (junto con el del efecto del agua en cubierta), si bien propone un método de evaluación más simplificado:



- Se define M_{w1} y se fija M_{w2} como $M_{w2} = 1,5 \cdot M_{w1}$.
- Se definen unos valores de θ_1 y θ_2 .
- A partir de estos ángulos se calculan las áreas \textcircled{a} y \textcircled{b} . Evidentemente ahora cada una de ellas tendrá su propio valor.

- Se define un coeficiente $C_1 = \textcircled{b} / \textcircled{a}$

La condición a imponer en el criterio de estabilidad es que este coeficiente sea mayor que uno.

$$C_1 = \frac{\textcircled{b}}{\textcircled{a}} > 1$$

Así, en el caso concreto de los buques pequeños:

$$M_{w1} = K_1 \cdot S \cdot H \cdot v^2 \quad (Tm \times m) \quad \text{con:}$$

$$K_1 = \text{coeficiente} = 7,6 \times 10^{-5}$$

v = velocidad del viento, que considere $v = 27,77 \text{ m/s}$ (que corresponde a 100 km/h).

S = superficie expuesta al viento (m^2).

H = distancia entre el baricentro y el calado medio (lo que nosotros habíamos llamado d) (m).

$\theta_2 = \theta_f$ o 40° , el menor de los dos

$\theta_1 = 20^\circ$

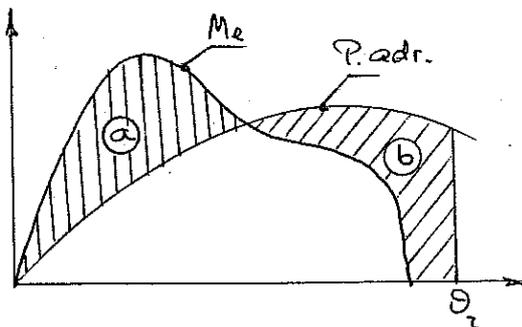
En el caso de los buques de carga general, pasaje, etc., estos valores se dan de una forma algo más compleja, por lo que nos remitimos a las Circulares correspondientes.

2. Efecto del agua en cubierta.

Este es el otro estudio que exige la Administración cuando en la condición de carga más desfavorable el $\text{sd}_{30} < 0,065 \text{ m} \cdot \text{rad}$.

La función de este momento escorante se obtiene considerando los productos

$$M_e = \text{peso del agua embarcada} \times \text{abscisa de su c. d. p.} \times \cos \theta$$



La Administración, en el punto IV.6 de las Circulares sobre estabilidad, dice que se calcule el peso del agua sobre la cubierta como la "... cantidad de agua igual a la que existiría si el pozo de cubierta estuviera lleno de agua hasta el punto más bajo de la

línea de repale..." con el buque inicialmente adrizado. A medida que vayamos considerando escoras crecientes, este peso irá disminuyendo por la evacuación que se producirá por la amura.

Asimismo, la posición del c. d. p. de este agua también dependerá del ángulo de escora.

Por tanto, el momento escorante para cada ángulo de escora se calculará teniendo en cuenta tanto la variación del c. d. p. del agua embarcada como las posibles pérdidas de este por la amura.

La Administración dice, además, que en los cálculos hay que considerar lo siguiente:

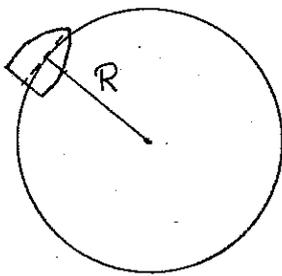
- El ángulo θ_2 que cierra el área \textcircled{b} es el menor de 40° o θ_p .
- "Durante la escora, los valores del viento y desplazamiento son constantes e iguales a los correspondientes para el buque sin agua en cubierta".
- "Se ignore el efecto de las portas de desajuste."

El coeficiente $C_2 = \frac{\textcircled{b}}{\textcircled{a}}$ deberá ser mayor que la unidad para que la estabilidad se pueda considerar satisfactoria.

Este estudio se realiza sólo para la condición de carga más desfavorable.

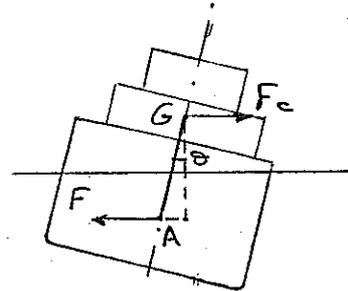
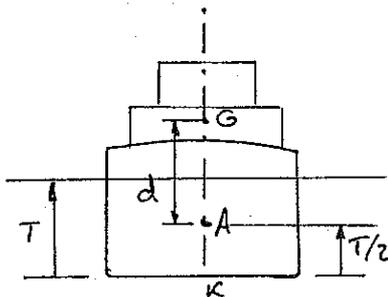
3: Momento escorante debido a la fuerza centrífuga.

La fuerza centrífuga por efecto de un giro viene dada por



$$F_c = \frac{Mv^2}{R} \quad \text{con} \quad M = \frac{\Delta}{g} \quad (\text{masa})$$

y la suponemos aplicada en el c.d.p. del buque 'G'.



Al igual que ocurría en el caso del momento escorante debido al viento, para que exista momento es necesario que el agua ejerza una fuerza de reacción F sobre la obra viva, del mismo valor que la fuerza centrífuga y de sentido contrario. Esta fuerza la suponemos aplicada en un punto de altura $T/2$ con el buque adrizado.

Con estas condiciones el momento escorante resultante será:

$$M_e = F_c \cdot d \cdot \cos \theta \quad \text{siendo } d = \overline{KG} - \frac{T}{2} \quad \rightarrow$$

$$M_e = \frac{\Delta \cdot v^2}{gR} \cdot \left(\overline{KG} - \frac{T}{2} \right) \cdot \cos \theta$$

En la situación corriente de estudio se toma un radio de giro igual a 5 veces la eslora en la flotación

$$R = 5 \cdot L_f \quad \rightarrow \quad M_e = \frac{\Delta \cdot v^2}{g \cdot 5 \cdot L_f} \cdot \left(\overline{KG} - \frac{T}{2} \right) \cdot \cos \theta$$

Si trabajamos en unidades métricas $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ con v en m/s .

$$M_e = 0,02 \cdot \frac{\Delta \cdot v^2}{L_f} \cdot \left(\overline{KG} - \frac{T}{2} \right) \cdot \cos \theta$$

La Administración pide que se estudie este momento para los buques de patrullaje (juntamente con la acumulación de pasajeros e una banda), exigiendo que el ángulo de escora que se alcance en la posición de equilibrio no sobrepase los 10° , para lo cual de la fórmula

$$M_e = 0,02 \cdot \frac{v^2}{L_f} \cdot \Delta \cdot \left(\overline{KG} - \frac{T}{2} \right) \quad \text{o el brazo escorante } \lambda = \frac{M_e}{\Delta} = 0,02 \cdot \frac{v^2}{L_f} \cdot \left(\overline{KG} - \frac{T}{2} \right)$$

Oboviamente está considerando que para $0 \leq \theta \leq 10^\circ \rightarrow \cos \theta \approx 1$.

4.- Momentos que actúan sobre los remolcadores.

Según diversos estudios del Servicio de Guarda Costas de los Estados Unidos, los accidentes típicos que se producen durante las maniobras de remolque son debidos a que aparece una componente transversal al remolcador en las fuerzas que actúan sobre el cable de remolque. Esta componente puede provenir de dos situaciones:

a) Producidas por el buque remolcado.- El cable de remolque se coloca transversalmente al remolcador, apareciendo una velocidad relativa entre el buque remolcado y este. Esto hace que el remolcador, al tener mayor masa, sea arrastrado por el buque remolcado.

Parece ser que el caso más frecuente de los accidentes, en esta situación se

produce cuando el remolcador trate de cambiar de posición para ayudar a terminar la maniobra; también puede ser debido a la acción del viento, las olas o a una mala coordinación de la maniobra con otros remolcadores que estén actuando a la vez.

b) Producidos por el propio remolcador debidas a la acción de su timón y de su hélice, que generen fuerzas de remolque cuando el cable estuviera en una posición transversal. Como esta causa puede ser controlada por la propia tripulación del remolcador, este tipo de accidente es menor frecuente que el anterior.

En ambos casos, estas fuerzas pueden hacer zozobrar por sí mismas al remolcador o producirle una inundación progresiva por el ángulo de escora a través de las aberturas (normalmente la maniobra de remolque se suele hacer en aguas abrigadas por lo que las puertas suelen estar abiertas).

El criterio del Servicio de Guarda Costas, y el que emplea la Administración española, está basado en el equilibrio de los momentos escorantes y adrizantes, en vez de emplear la igualdad de áreas. La condición es que el ángulo de equilibrio estático sea inferior al ángulo crítico, ó al de inundación progresiva.

Los momentos escorantes, en cada caso, se evalúan de la siguiente forma:

a) Debido al tiro del remolque

El cable se va a comportar como un muelle, en el que la fuerza del tiro se evalúa por la fórmula

$$T = \frac{1}{2} \cdot C_d \cdot \rho \cdot A_p \cdot v_t^2$$

siendo:

ρ = densidad del agua

A_p = área del perfil del remolcador bajo el agua.

v_t = velocidad lateral del remolque. De las consideraciones realizadas se toma como valor aceptable 5 nudos.

C_d = coeficiente de tiro = $C_1 \cdot C_2$

C_1 = coeficiente de tiro, función de la posición longitudinal de la bita de remolque.

C_2 = corrección debida a la escora del remolcador.

Como ya hemos comentado varias veces, para que exista momento debe existir una reacción con su punto de aplicación. Esta reacción la proporciona la resistencia hidrodinámica sobre la obra viva. En cuanto a su punto de aplicación se considere que su distancia a la flotación aumenta a partir de cierto ángulo de escora, pues al sumergirse el trancañil cambia sustancialmente la forma de la obra viva y por tanto de su resistencia.

Aparece así, pues, otro coeficiente C_3 que multiplicado por el calado medio da el valor de esta distancia, en función del ángulo de escora, tomado en relación al ángulo de inmersión del borde de la cubierta.

El momento escorante (en tonelámetros) debido al tiro transversal del buque remolcado queda así según la Administración

$$M_1 = \frac{1}{19,6} \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \gamma \cdot v_t^2 \cdot A_d \cdot (h \cdot \cos \theta + C_3 \cdot C_m)$$

$$\frac{1}{19,6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g} \quad (\text{por trabajar con peso específico y no con densidad})$$

γ = peso específico del agua del mar = $1,026 \text{ Tm/m}^3$

v_t = velocidad lateral del remolcador = $2,57 \text{ metros/segundo}$ (= 5 nudos)

A_d = área de la proyección sobre el plano diametral de la obra viva (m^2)

h = altura sobre la flotación de la bota de remolque (m)

θ = ángulo de escora.

C_m = calado medio (m)

C_1, C_2 y C_3 = coeficientes que aparecen en las gráficas (véanse las notas sobre los criterios de estabilidad - remolcadores, entre otras a parte).

b) Debida al tiro propio

La fuerza sobre la bota de remolque ejercida por el timón y la maquinaria propulsora, a través de la hélice, varía con el ángulo de la línea de remolque respecto al plano de simetría del remolcador, disminuyendo al aumentar este ángulo. La relación de la fuerza ejercida y la correspondiente al ángulo cero, en el que la fuerza ejercida es máxima, parece ser que es independiente del tamaño o situación de la hélice y del timón, y su valor se puede tomar igual a 0,70 para una posición tal de la bota de remolque que su distancia a la popa

sea al menos igual a 0,3 veces la altura en la flotación. Cuando esta distancia sea menor hay que multiplicar este valor de 0,70 por un coeficiente de corrección C_5 . La distancia a la flotación del punto de aplicación de la reacción bajo el agua se considere de 0,52 veces el calado. En este caso, como podemos apreciar, la fracción del calado que se toma para el punto de aplicación de la reacción es inferior a la considerada en el caso anterior. Esto es debido a que ahora la fuerza lateral la produce el timón, la hélice y el flujo de agua en la parte de popa del casco, mientras que en el caso a) las fuerzas laterales eran generadas por la resistencia que oponía toda la obra viva.

Según todo esto, el momento escorante M_2 (en toneladas) que se considere es:

$$M_2 = C_4 \times C_5 \cdot T \cdot (h \cdot \cos \theta + C_6 \cdot C_m)$$

siendo:

C_4 = fracción efectiva del empuje en la bota de remolque que actúa con el cable situado transversalmente al remolcador = 0,70

C_5 = coeficiente corrector por la posición longitudinal de la bota de remolque.

T = empuje máximo en la bota de remolque (T_m). La Administración pide que este valor sea el que se obtiene en la prueba de tracción a punto fijo del remolcador.

C_6 = distancia vertical desde la flotación del punto de aplicación de la resistencia como tracción del calado = 0,52

Los valores de h , C_m y θ tienen los mismos significados que en el caso a)

Cuando el remolcador tenga un dispositivo radial giratorio en el pantocho de remolque, se puede introducir, restando, dentro de los paréntesis, tanto de M_1 como de M_2 , el término " $r \cdot \sin \theta$ ", siendo r el radio de giro del pantocho en metros.

Como ya se ha dicho anteriormente, el criterio de estabilidad es que, en ambos casos, el ángulo de escora en el que se produce el equilibrio estático no sea mayor que el necesario para producir la zozobra o su inundación a través de las aberturas.

Teoría del Buque

SUPERFICIES LIBRES

INFLUENCIA DE LAS SUPERFICIES LIBRES SOBRE LA ESTABILIDAD TRANSVERSAL DEL BUQUE. ESTUDIO TEÓRICO.

Introducción.

Según vimos al estudiar la estabilidad inicial, si un buque tiene algún tanque parcialmente lleno de líquido, cuando se produzca una inclinación por cualquier causa, interna o externa, la superficie del líquido tendrá libertad para modificar su posición relativa con respecto al sistema de coordenadas del barco. Esto hace que el centro de gravedad del líquido en el tanque sea esencialmente variable, lo que a su vez, por el momento de transferencia, provoca que el centro de gravedad del buque no permanezca fijo, disminuyendo siempre el brazo adrizante. A esta acción escorante, motivada por el libre movimiento del líquido dentro del tanque, es lo que se conoce como carenas líquidas o superficies libres.

Físicamente, por tanto, este fenómeno no es más que un caso particular del traslado de pesos, en el cual debemos tener en cuenta dos cosas:

- a) Tanto si la escora es a babor, como si es a estribor, siempre va a disminuir el brazo adrizante, y podría llegar a hacerlo negativo.
- b) Del momento de transferencia, o de la variación de la posición del centro de gravedad del buque, sólo nos va a interesar cómo afecta al par, o al brazo adrizante, para cada ángulo de escora.

Planteamiento general

Para hacer matemáticamente viable el problema hacemos las siguientes hipótesis de trabajo:

- a) El líquido es homogéneo. El peso específico del líquido, $\gamma_{liq.}$, es constante en cualquier punto, y por tanto siempre consideraremos que el peso del líquido dentro del tanque será:

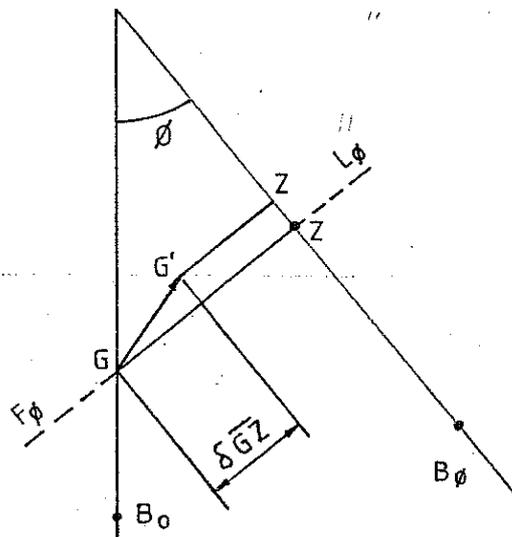
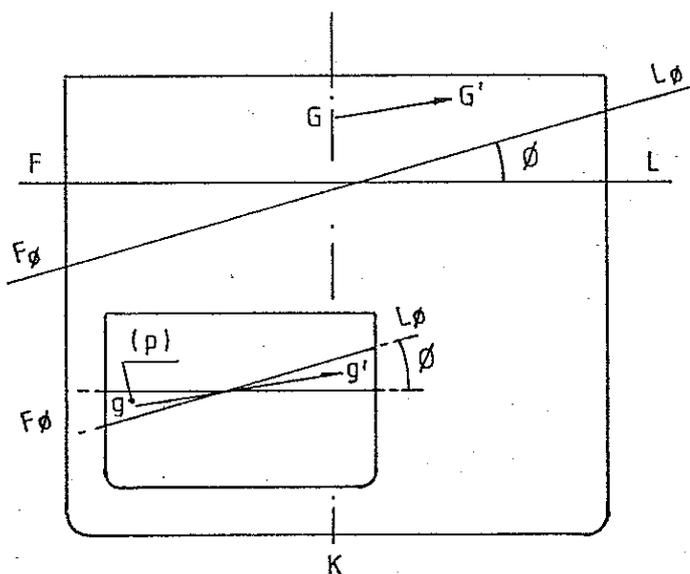
$$P_{liq.} = \gamma_{liq.} \times v_{liq.}$$

Esto quiere decir, entre otras cosas, que el centro de gravedad del peso de un líquido coincidirá con el del volumen que ocupe.

- b) No existen fuerzas de inercia. La superficie libre del líquido siempre va a ser un área plana paralela en todo momento, es decir, para cada ángulo de escora, a la flotación correspondiente. Ésta es una hipótesis que obviamente nos aleja de la realidad.

El proceso que tiene lugar lo podemos presentar de forma esquemática de la siguiente manera:

Traslado de un peso p , correspondiente a una cuña de líquido, desde su centro de gravedad g hasta otro nuevo g' ($g \rightarrow g'$) \Rightarrow Por el momento de transferencia variará la posición del centro de gravedad de todo el líquido dentro del tanque \Rightarrow Por el mismo motivo también cambiará la posición del centro de gravedad del buque ($G \rightarrow G'$) \Rightarrow Todo esto repercute en una disminución del brazo adrizante ($\delta Gz = Gz - G'z$), y por tanto del par adrizante P_a .



Gz = brazo adrizante **sin** superficies libres para un ángulo de escora ϕ dado.

$G'z$ = brazo adrizante **con** superficies libres para el mismo ángulo ϕ .

$$G'z = Gz - \delta Gz$$

Si tenemos en cuenta que el brazo adrizante es el par adrizante (P_a) dividido por una constante que es el desplazamiento, tendremos:

$$G'z = Gz - \delta Gz \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P'_a}{\Delta} = \frac{P_a}{\Delta} - \frac{M_{sl}}{\Delta} \quad \Rightarrow \quad \delta Gz = \frac{M_{sl}}{\Delta}$$

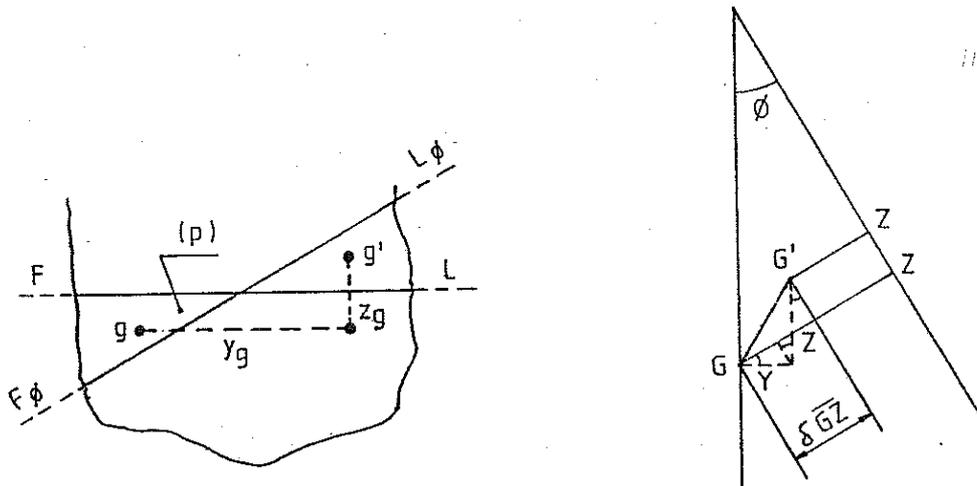
es decir, este M_{sl} es un valor que tendrá unidades de momento, y que se conoce como momento escorante debido a la superficie libre, o más simplificada **momento por superficies libres**. En este estudio teórico, como M_{sl} depende del ángulo de escora ϕ que estemos estudiando, lo vamos a representar por M_ϕ .

Una vez fijado el ángulo de escora ϕ que vayamos a estudiar, el que existan o no superficies libres sólo afecta al centro de gravedad del buque ($G \rightarrow G'$), pero no a su centro de carena B_ϕ , ni a la flotación correspondiente $F_\phi L_\phi$. No obstante, según

nuestras hipótesis simplificativas, existirá un paralelismo entre la superficie libre del líquido, la flotación del buque y los brazos adrizantes Gz y $G'z$ para ese ángulo.

Para obtener la expresión matemática de δGz podemos seguir dos caminos:

- a) Descomponer el vector $\overline{gg'}$, correspondiente a la traslación de la cuña del líquido en el tanque, en una componente horizontal y_g y otra vertical z_g , con lo que nos quedaría:



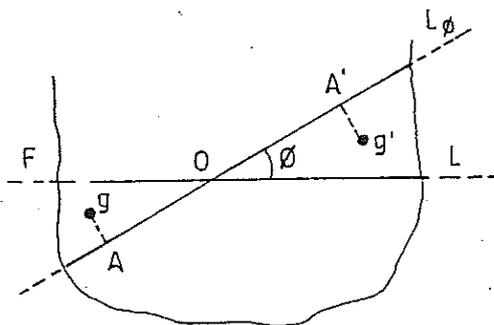
$$\left. \begin{aligned} p \times y_g &= \Delta \times Y \rightarrow Y = \frac{p \times y_g}{\Delta} \\ p \times z_g &= \Delta \times Z \rightarrow Z = \frac{p \times z_g}{\Delta} \end{aligned} \right\}$$

siendo Y y Z las componentes horizontal y vertical, respectivamente, del vector variación del centro de gravedad del buque $\overline{GG'}$.

Proyectando estas componentes en la dirección de Gz (o $F_\theta L_\theta$)

$$\delta Gz = Y \cos \phi + Z \operatorname{sen} \phi$$

- b) Según podemos ver en el caso a) anterior, δGz , es precisamente la proyección de $\overline{GG'}$ en la dirección de Gz (o $F_\theta L_\theta$). Por tanto, como método alternativo, podemos aplicar el momento de transferencia directamente sobre la proyección del vector $\overline{gg'}$ en la dirección de $F_\theta L_\theta$, es decir sobre el vector $\overline{AA'}$



$$p \times \overline{AA'} = \Delta \times \delta Gz \Rightarrow \delta Gz = \frac{p \times \overline{AA'}}{\Delta}$$

La ventaja que presenta esta alternativa es que, si comparamos esta expresión con la de $\delta Gz = \frac{M_\phi}{\Delta}$, vemos que el momento por superficies libres numéricamente coincide con la componente del momento de transferencia:

$$M_\phi = p \times \overline{AA'}$$

De momento vamos a utilizar el método *b*).

Casos de estudio

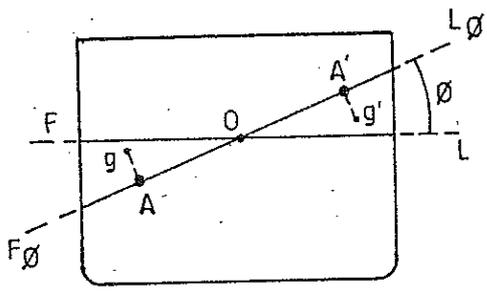
A.- La sección transversal de cada cuña es un triángulo rectángulo o se le puede asimilar.

B.- Caso general.

A.- La sección transversal de la cuña es un triángulo rectángulo o asimilable

Adoptamos la siguiente denominación:

- x = variable longitudinal en el sentido de la eslora.
- y = variable longitudinal en el sentido de la manga.
- z = variable longitudinal en el sentido del puntal.
- l, b, h = eslora, manga y puntal del tanque, respectivamente.
- A_s = área de la sección transversal de la cuña.
- v = volumen (obviamente si A_s es constante, $v = A_s \times l$).
- θ = variable angular de la escora.
- \emptyset = ángulo de escora que queremos estudiar (al estar definido será fijo y constante).
- Y = variación del centro de gravedad del buque en el sentido de la manga.
- Z = variación del centro de gravedad del buque en el sentido del puntal.



Para estudiar el momento escorante $M_\phi = p \times \overline{AA'}$, descomponemos el vector $\overline{AA'}$ como

$$\overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'}$$

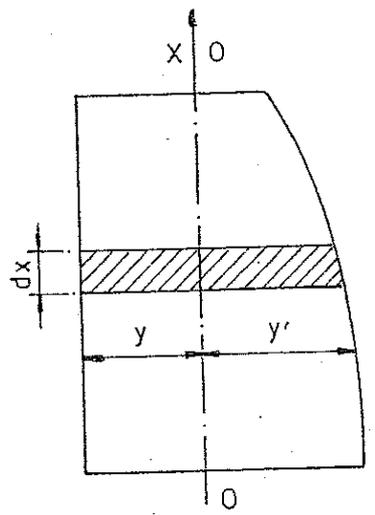
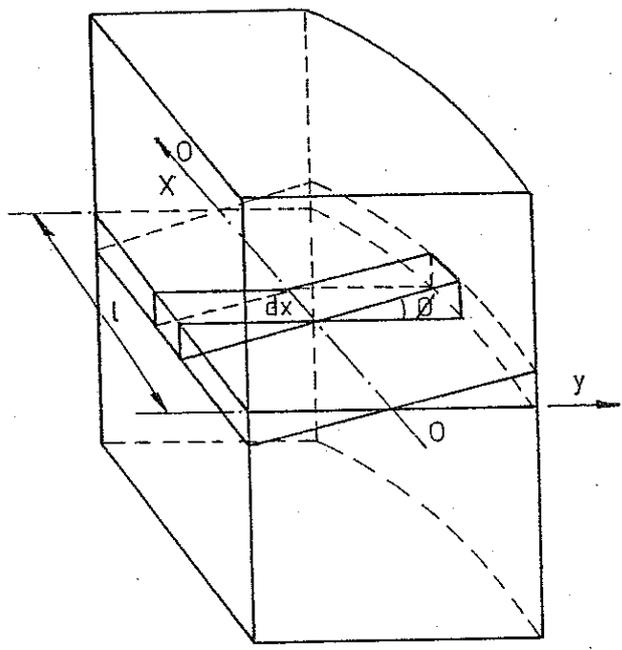
$$M_\phi = p \times \overline{AA'} = p \times (\overline{AO} + \overline{OA'}) = p \times \overline{AO} + p \times \overline{OA'}$$

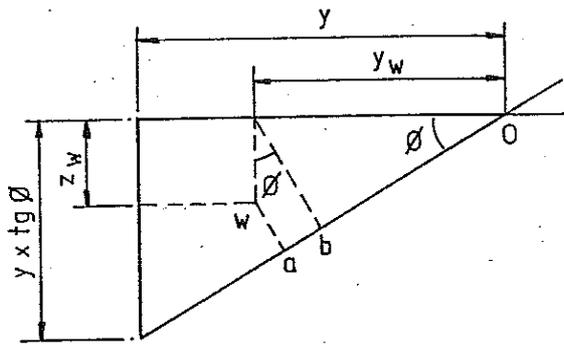
Si llamamos $M_1 = p \times \overline{AO}$ y $M_2 = p \times \overline{OA'}$, nos queda $M_\phi = M_1 + M_2$.

Pero M_1 es el momento estático del peso de la cuña que desaparece respecto del eje longitudinal OO formado por la intersección de las dos superficies libres.

Análogamente M_2 será el momento estático de la cuña que surge.

Para calcular M_1 vamos a considerar un elemento de cuña de longitud dx , en el sentido de la eslora, cuyo peso de líquido será dp . Según estamos suponiendo, su sección transversal será un triángulo rectángulo, a cuyo centro de gravedad vamos a llamar w . Para esta cuña elemental, las distancias y_w y z_w del centro de gravedad de su volumen dv coincidirán con las del centro de gravedad de su sección transversal.





Por ser la sección transversal un triángulo:

$$\left. \begin{aligned} y_w &= \frac{2}{3} \times y \\ z_w &= \frac{1}{3} \times y \tan \phi \end{aligned} \right\}$$

El momento estático dM_1 de este elemento de cuña será:

$$dM_1 = dp \times \overline{ao}$$

siendo:

• dp

$$\left. \begin{aligned} dp &= dv \cdot \gamma_l = A_s \cdot dx \cdot \gamma_l \\ A_s &= \frac{1}{2} \cdot y \cdot y \tan \phi \end{aligned} \right\} \rightarrow dp = \frac{1}{2} y^2 \tan \phi \cdot \gamma_l \cdot dx$$

• \overline{ao}

$$\overline{ao} = \overline{ab} + \overline{bo}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{ab} &= z_w \times \sin \phi = \frac{1}{3} y \tan \phi \times \sin \phi \\ \overline{bo} &= y_w \times \cos \phi = \frac{2}{3} y \times \cos \phi \end{aligned} \right\} \rightarrow \overline{ao} = \frac{1}{3} y \tan \phi \sin \phi + \frac{2}{3} y \cos \phi$$

Con lo que nos queda:

$$\begin{aligned} dM_1 &= dp \times \overline{ao} = \frac{1}{2} y^2 \tan \phi \cdot \gamma_l \cdot dx \cdot \left[\frac{1}{3} y \tan \phi \sin \phi + \frac{2}{3} y \cos \phi \right] \rightarrow \\ dM_1 &= \frac{y^3}{3} \tan \phi \cdot \gamma_l \cdot \left[\frac{\tan \phi}{2} \sin \phi + \cos \phi \right] dx \end{aligned}$$

El momento total M_1 será:

$$M_1 = \int dM_1 = \gamma_l \tan \phi \left[\frac{\tan \phi}{2} \sin \phi + \cos \phi \right] \times \int_0^l \frac{y^3}{3} dx$$

Análogamente, el otro momento M_2

$$M_2 = \gamma_l \tan \phi \left[\frac{\tan \phi}{2} \operatorname{sen} \phi + \cos \phi \right] \times \int_0^l \frac{(y')^3}{3} dx$$

Y el momento escorante total $M_\phi = M_1 + M_2$

$$M_\phi = \gamma_l \tan \phi \left[\frac{\tan \phi}{2} \operatorname{sen} \phi + \cos \phi \right] \times \left[\int_0^l \frac{y^3}{3} dx + \int_0^l \frac{(y')^3}{3} dx \right]$$

Si tenemos en cuenta que la suma de las dos integrales que aparecen en esta expresión es precisamente el momento de inercia, i_0 , de toda la superficie libre adrizada respecto del eje OO , podemos poner

$$M_\phi = i_0 \gamma_l \tan \phi \left[\frac{\tan \phi}{2} \operatorname{sen} \phi + \cos \phi \right] = i_0 \gamma_l \left[\frac{\tan^2 \phi}{2} \operatorname{sen} \phi + \tan \phi \cos \phi \right]$$

Como $\tan \phi \times \cos \phi = \operatorname{sen} \phi$ nos queda

$$\boxed{M_\phi = i_0 \gamma_l \operatorname{sen} \phi \left[1 + \frac{\tan^2 \phi}{2} \right]} \quad (1)$$

Que es la expresión del momento por superficies libres para el tanque de paredes verticales.

Observaciones:

- El eje OO delimitado por las dos superficies libres (adrizada y escorada ϕ), es el eje que pasa por el centro de gravedad del área de toda la superficie libre adrizada. Esto se puede ver aplicando el teorema de Euler (aunque el ángulo ϕ no sea un infinitésimo), ya que la sección transversal es un triángulo rectángulo (calculando el volumen de la cuña que desaparece, por un lado, y el de la que surge, por otro; al igualarlos y simplificar nos queda la igualdad de momentos estáticos de las dos áreas complementarias).
- En ningún momento de este razonamiento se ha obligado a que el tanque sea simétrico, por tanto, los valores de y e y' no tienen por qué ser iguales para un mismo x .
- En principio, la expresión (1) es válida para cualquier ángulo ϕ , con tal de que la sección transversal de la cuña la podamos suponer triangular. Esto ocurre cuando las paredes del tanque son verticales, o asimilables, o cuando el ángulo ϕ es muy pequeño.

Dentro de este apartado A existen dos casos particulares que para nosotros van a tener un gran interés:

- a) El tanque con forma de prisma recto y sección transversal rectangular y constante (paralelepípedo ortoédrico), en el que la superficie libre sólo toca las paredes verticales del tanque.

En este caso la superficie libre siempre será un rectángulo, y el eje OO es su eje longitudinal de simetría, por lo que tendremos:

$$i_0 = \frac{lb^3}{12}$$

que sustituido en (1) nos queda

$$M_\phi = \frac{lb^3}{12} \gamma_l \operatorname{sen} \phi \left[1 + \frac{\tan^2 \phi}{2} \right] \quad (2)$$

- b) El otro caso de interés se presenta cuando el ángulo de la cuña es muy pequeño y podamos considerarlo como un infinitésimo, pudiendo hacer las aproximaciones geométricas

$$\text{arco} \approx \text{cuerda} \approx \text{tangente}$$

y trigonométricas

$$\cos(d\theta) \approx 1 \quad ; \quad \operatorname{sen}(d\theta) \approx \tan(d\theta) \approx d\theta$$

Dentro de este último supuesto, si consideramos la zona de estabilidad inicial ($\theta = 0 \pm d\theta$), la expresión (1) nos queda:

$$M_\phi = i_0 \gamma_l \operatorname{sen}(d\theta) \left[1 + \frac{\tan^2(d\theta)}{2} \right]$$

Despreciando el infinitésimo $\operatorname{sen}(d\theta) \times \tan^2(d\theta)$ por ser de orden superior

$$M_\phi = i_0 \gamma_l \operatorname{sen}(d\theta)$$

es decir

$$M_\phi = i_0 \gamma_l d\theta$$

y el brazo escorante, o disminución del brazo adrizante

$$\delta Gz = \frac{M_\phi}{\Delta} = \frac{i_0 \gamma_l}{\Delta} d\theta$$

En este caso las **conclusiones** que se derivan, ya conocidas, son:

1. Por ser $d\theta$ un infinitésimo, la línea de intersección de las dos superficies libres que forman las cuñas pasa por su centro de gravedad (teorema de Euler).
2. En estabilidad inicial, el brazo adrizante (sin el efecto de las superficies libres) para un ángulo de escora $d\theta$ valía

$$G_z = GM \times d\theta$$

Si le restamos la disminución del brazo adrizante debida a la superficie libre //

$$G'_z = G_z - \delta G_z = G_z - \frac{M_\theta}{\Delta} = GM \times d\theta - \frac{i_0 \gamma_l}{\Delta} \times d\theta \Rightarrow$$

$$G'_z = \left(GM - \frac{i_0 \gamma_l}{\Delta} \right) \times d\theta$$

Comparando las expresiones de G'_z (con superficies libres) con G_z (sin superficies libres), vemos que el buque se comporta **como si** su altura metacéntrica fuese

$$G_0M = GM - \frac{i_0 \gamma_l}{\Delta}$$

3. Si existiesen varios tanques con superficies libres, su efecto es acumulativo

$$G_0M = GM - \frac{\sum i_0 \gamma_l}{\Delta}$$

4. Según todo lo anterior, vemos que el efecto de las superficies libres **sobre la estabilidad inicial es equivalente** a una elevación GG_0 del centro de gravedad del buque, que es lo que se conoce como **elevación virtual**.

$$GG_0 = \frac{\sum i_0 \gamma_l}{\Delta}$$

o

$$KG_0 = KG + \frac{\sum i_0 \gamma_l}{\Delta}$$

Como éste es un punto polémico que suele dar lugar a errores de concepto graves, debemos hacer hincapié en lo siguiente:

- 4.1. La elevación es **virtual**, es decir, no es real, o dicho con otras palabras: **no es más que un mero artificio de cálculo**.

- 4.2. Como en todo momento hemos estado suponiendo que el ángulo es un infinitésimo ($\varnothing \approx d\theta$), en principio, **solamente es válido para calcular el valor de la altura metacéntrica G_0M .**

B.- Caso general.

En la expresión (1) aproximábamos todas las secciones transversales de las cuñas a lo largo de la eslora l a un triángulo rectángulo. En el caso general, si consideramos un tanque que tenga una forma cualquiera, esto ya no es válido. Necesitamos otro planteamiento.

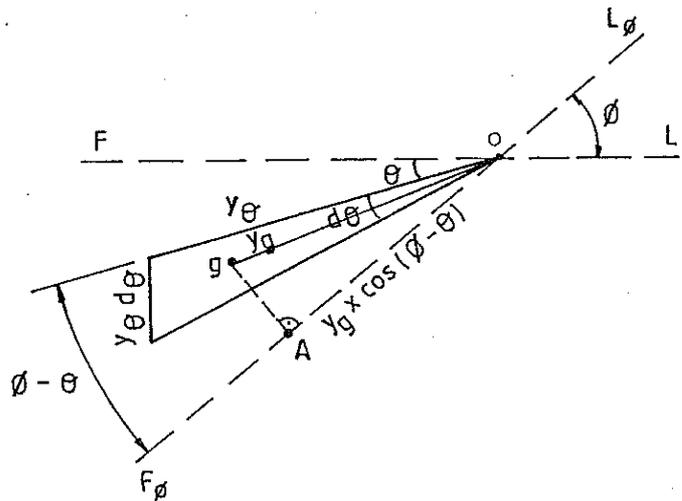
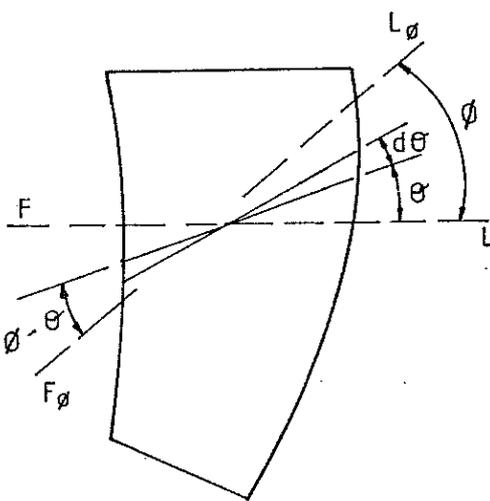
Sabemos que:

- Si el ángulo es un infinitésimo sí que podemos considerar que la sección transversal de la cuña es un triángulo.
- El momento por superficies libres valía $M_\phi = p \times \overline{AA'}$, siendo $\overline{AA'}$ la proyección del vector desplazamiento de los centros de gravedad de las cuñas en la dirección final $F_\phi L_\phi$.

Planteamiento:

Si la cuña correspondiente al ángulo \varnothing la descomponemos en infinitas cuñas elementales ($d\theta$), con θ desde 0 hasta \varnothing , cada una de ellas dará un momento dM_ϕ . El momento por superficies libres total será la suma (integral) de todos ellos.

$$M_\phi = \int_0^\varnothing dM_\phi$$



Para determinar $dM_\phi = d p \times \overline{AA'}$ tendremos que proyectar el centro de gravedad g de cada cuña ($d\theta$) en la dirección final $F_\phi L_\phi$. (Obviamente cada cuña ($d\theta$) tendrá un vector $\overline{AA'}$ distinto, sin embargo todos ellos en la dirección $F_\phi L_\phi$).

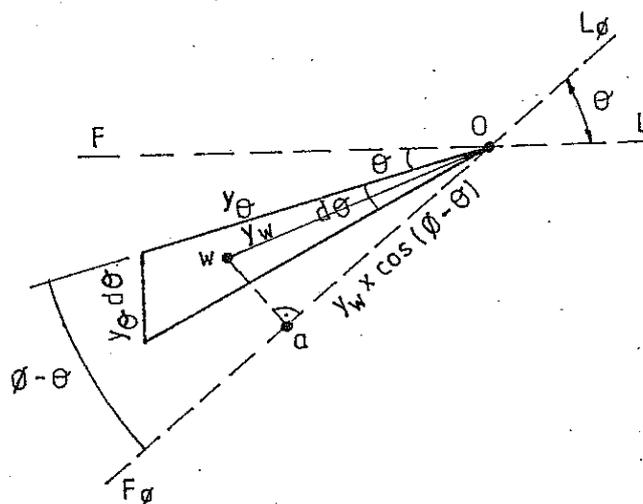
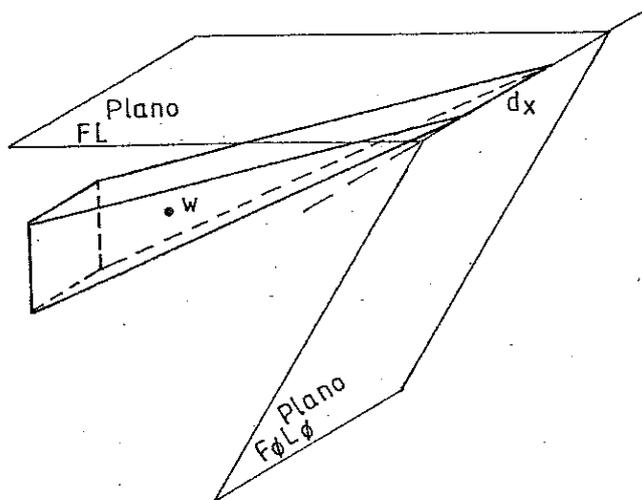
Para obtener la expresión de dM_ϕ hacemos como en el caso A:

- dM_ϕ lo descomponemos en el momento de la cuña que desaparece, dM_1 , más el momento de la cuña que surge dM_2 .

$$dM_\phi = dM_1 + dM_2$$

lo que representa sendos momentos estáticos de un peso.

- Para calcular dM_1 tomamos, a su vez, un elemento genérico de longitud dx en el sentido de la eslora. El peso de este elemento de cuña de longitud dx será un δp y dará un momento dm_1 .
- Además, la coordenada y_w del centro de gravedad w de este δp coincidirá con el centro de gravedad de su volumen δv , y será igual a la respectiva coordenada de su sección transversal (dA_s) por tener una longitud dx .



$$dm_1 = \delta p \times \overline{ao} = \delta p \times y_w \cos(\phi - \theta)$$

con $\delta p = \gamma_l \times \delta v$ y $\delta v = dA_s \times dx$

Por otro lado, al ser $d\theta$ un infinitésimo y considerar que la sección transversal es un triángulo

$$dA_s = \frac{1}{2} \times y_\theta \times y_\theta d\theta \quad \text{e} \quad y_w = \frac{2}{3} y_\theta$$

y por tanto

$$\delta p = \gamma_l \times \delta v = \gamma_l \times d A_s \times dx \Rightarrow \delta p = \gamma_l \times \frac{1}{2} y_\theta^2 d\theta \times dx$$

Y así nos queda

$$d m_1 = \delta p \times y_w \cos(\phi - \theta) = \gamma_l \times \frac{1}{2} y_\theta^2 d\theta dx \times \frac{2}{3} y_\theta \cos(\phi - \theta) \rightarrow$$

$$d m_1 = \gamma_l \frac{1}{3} y_\theta^3 \cos(\phi - \theta) d\theta dx$$

Y el momento de toda la cuña $d\theta$

$$d M_1 = \int d m_1 = \int_0^l \gamma_l \frac{1}{3} y_\theta^3 \cos(\phi - \theta) d\theta dx = \gamma_l \cos(\phi - \theta) d\theta \int_0^l \frac{y_\theta^3}{3} dx$$

Razonando análogamente para la cuña elemental $d\theta$ que surge tendremos

$$d M_2 = \gamma_l \cos(\phi - \theta) d\theta \int_0^l \frac{(y'_\theta)^3}{3} dx$$

El momento elemental por superficies libres de las dos cuñas $d\theta$.

$$d M_\phi = d M_1 + d M_2 = \gamma_l \cos(\phi - \theta) d\theta \times \left[\int_0^l \frac{y_\theta^3}{3} dx + \int_0^l \frac{(y'_\theta)^3}{3} dx \right]$$

Como ya es sabido, la suma de las dos integrales que aparecen entre corchetes es el momento de inercia i_θ de toda la superficie libre del líquido en el tanque, correspondiente a una inclinación θ , respecto del eje longitudinal que pasa por su centro de gravedad (teorema de Euler). Obviamente el centro de gravedad de la superficie libre para un ángulo θ no tiene por qué coincidir con el correspondiente a la superficie libre adrizada.

$$d M_\phi = \gamma_l i_\theta \cos(\phi - \theta) d\theta \quad \text{con} \quad i_\theta = \int_0^l \frac{y_\theta^3}{3} dx + \int_0^l \frac{(y'_\theta)^3}{3} dx$$

Por último, el momento escorante total debido a la superficie libre correspondiente a la inclinación ϕ de estudio, será la integral de todos los $d M_\phi$

$$M_\phi = \int d M_\phi \Rightarrow \boxed{M_\phi = \gamma_l \int_0^\phi i_\theta \cos(\phi - \theta) d\theta} \quad (3)$$

Conviene hacer la observación de que θ es el ángulo de estudio, y por tanto constante a la hora de desarrollar la integral de la expresión (3) (la variable es θ).

La disminución del brazo adrizante, o brazo escorante, debido a la superficie libre será

$$\delta Gz = \frac{M_{\phi}}{\Delta}$$

y si hay varios tanques su efecto es acumulativo, como ya comentamos

$$\delta Gz = \frac{\sum M_{\phi}}{\Delta}$$

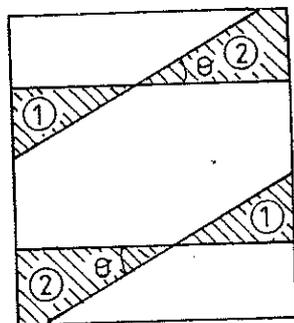
En la práctica el desarrollo de la expresión (3) es extremadamente laborioso, por lo que, a efectos de estudio, vamos a considerar tres casos:

1. Tanque con forma de prisma recto rectangular, o asimilable
2. Tanque con forma de prisma recto en el sentido proa-popa, o asimilable, cuya sección transversal, aunque sea constante, no la podamos considerar rectangular.
3. Tanque de formas totalmente irregulares, y que no la podamos asimilar a ninguno de los dos casos anteriores.

B.1. Prisma recto rectangular o asimilable

A pesar de que es el menos frecuente, en la práctica es el que generalmente se aplica para todos los tanques, por lo que al ser el más importante lo vamos a estudiar con cierto detalle.

Sean sus dimensiones $l \times b \times h$, que por la forma del tanque serán constantes.



Si observamos la figura, vemos que en este tipo de tanques, y para una escora θ dada, los volúmenes de las cuñas son recíprocamente iguales cuando el tanque está lleno en porcentajes complementarios entre sí (por ejemplo, 30% y 70%, 60% y 40%, etc.). En consecuencia, en estos casos los momentos escorantes serán los mismos, por lo que de momento sólo vamos a estudiar los casos en los que el porcentaje de llenado sea mayor o igual al 50%

Así, si llamamos n a la fracción de volumen vacío

$$n = \frac{V_{vacío}}{V_{total\ del\ tanque}}$$

este parámetro variará entre 0 y 0,5.

Por otro lado, la cuña de líquido que se traslada tendrá el mayor volumen posible, en cualquier situación, y por tanto dará el **momento escorante máximo**, cuando el porcentaje de llenado sea del 50%.

Para facilitar el cálculo en estos tanques prismáticos, el momento escorante debido a la superficie libre lo vamos a expresar como

$$M_{\phi} = i_0 \cdot \gamma_l \cdot C \quad (4)$$

siendo i_0 el momento de inercia correspondiente a la superficie libre adrizada respecto al eje longitudinal que pasa por su correspondiente centro de gravedad, y C un parámetro adimensional que habrá que determinar en cada caso.

Para obtener la expresión de C tendremos que imponer la condición de que el momento escorante, según nosotros queremos expresarlo (4), tiene que ser siempre idéntico a la ecuación (3).

Igualando las expresiones (3) y (4)

$$M_{\phi} = i_0 \cdot \gamma_l \cdot C = \gamma_l \int_0^{\phi} i_{\theta} \cos(\phi - \theta) d\theta \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{i_0} \int_0^{\phi} i_{\theta} \cos(\phi - \theta) d\theta \quad (5)$$

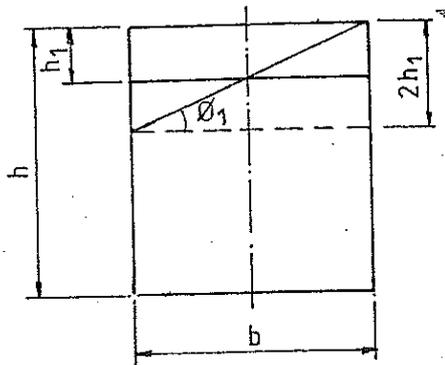
Debido a la pérdida de continuidad de la función integrando en la ecuación (5), en función del ángulo ϕ , debemos considerar tres posibles intervalos de integración:

1. La superficie libre sólo toca las paredes verticales del tanque.
2. La superficie libre toca el techo y una pared lateral del tanque.
3. La superficie libre toca el techo y el fondo del tanque.

B.1.1. La superficie libre sólo toca las paredes verticales

El **ángulo límite** ϕ_1 de este intervalo será aquél en el que el nivel de líquido alcance el canto entre el techo y la pared.

Si observamos la siguiente figura, vemos que por la simetría



$$\tan \phi_1 = \frac{2h_1}{b}$$

Si suponemos que la superficie libre está adrizada, el volumen vacío del tanque será $nv = lbh_1$, si el volumen total del tanque es $v = lbh$, sustituyendo

$$nv = lbh_1 \rightarrow nlbh = lbh_1 \rightarrow nh = h_1$$

y por tanto

$$\tan \phi_1 = \frac{2h_1}{b} = \frac{2nh}{b}$$

Si para adimensionalizar creamos el parámetro s , tal que

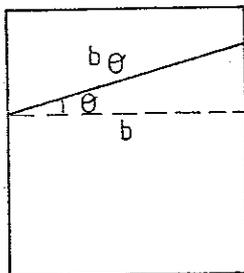
$$\boxed{s = \frac{h}{b}} \quad (6)$$

nos queda

$$\boxed{\tan \phi_1 = \frac{2nh}{b} = 2ns} \quad (7)$$

Para desarrollar C tenemos que integrar la ecuación (5)

$$C = \frac{1}{i_0} \int_0^\phi i_\theta \cos(\phi - \theta) d\theta$$



En este tipo de tanque, tanto para la situación de adrizado, como para cualquier ángulo de escora θ , la superficie libre siempre es un rectángulo; por ello los momentos de inercia que aparecen en la ecuación, respecto del eje que pasa por sus respectivos centros de gravedad, serán

$$i_0 = \frac{lb^3}{12} \quad \text{e} \quad i_\theta = \frac{lb_\theta^3}{12}$$

pero $b_\theta = \frac{b}{\cos \theta} \rightarrow i_\theta = \frac{lb^3}{12 \times \cos^3 \theta}$

Sustituyendo en C

$$C = \frac{12}{12} \int_0^\phi \frac{12 \cos^3 \theta}{12 \cos^3 \theta} \cos(\phi - \theta) d\theta = \int_0^\phi \frac{\cos \phi \cos \theta + \text{sen } \phi \text{ sen } \theta}{\cos^3 \theta} d\theta \rightarrow$$

$$C = \int_0^\phi (\cos \phi \sec^2 \theta + \text{sen } \phi \tan \theta \sec^2 \theta) d\theta$$

como θ es el ángulo final de escora, dado y por tanto constante, tenemos

$$C = \cos \phi \int_0^\phi \sec^2 \theta d\theta + \text{sen } \phi \int_0^\phi \tan \theta \sec^2 \theta d\theta \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\phi \sec^2 \theta d\theta = \tan \phi \\ \int_0^\phi \tan \theta \sec^2 \theta d\theta = \frac{\tan^2 \phi}{2} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$C = \cos \phi \tan \phi + \text{sen } \phi \frac{\tan^2 \phi}{2}$$

simplificando

$$\boxed{C = \text{sen } \phi \left[1 + \frac{\tan^2 \phi}{2} \right]} \quad \text{para } \tan \phi \leq 2ns \quad (8)$$

Comparación con el caso A

Como podemos observar, cuando el tanque es un prisma ortoédrico y la superficie libre sólo toca las paredes del tanque, estamos en un caso particular del procedimiento A anterior, en el que suponíamos que la sección transversal de la cuña era un triángulo rectángulo a lo largo de la eslora (tanque de paredes verticales). Por tanto, el M_ϕ que hemos obtenido aplicando el procedimiento general debe coincidir con el que obtendríamos si utilizásemos el método A, es decir, con la ecuación (2). En efecto:

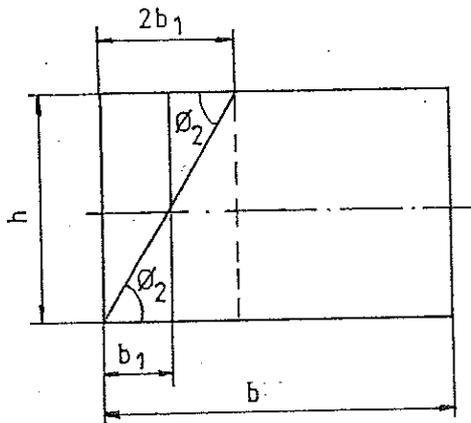
$$\text{Por (4) } M_\phi = i_0 \cdot \gamma_l \cdot C \quad \text{y por (8) } C = \text{sen } \phi \left[1 + \frac{\tan^2 \phi}{2} \right], \text{ con lo que nos queda}$$

$$M_\phi = i_0 \gamma_l C = i_0 \gamma_l \text{sen } \phi \left[1 + \frac{\tan^2 \phi}{2} \right]$$

que coincide con la expresión (1), y que al ser la superficie libre un rectángulo y sustituir $i_0 = \frac{12b^3}{12}$ nos quedaría la ecuación (2).

B.1.2. La superficie libre toca el techo y una pared

Si seguimos considerando las mismas condiciones que venimos diciendo (grado de llenado mayor o igual al 50%), el nuevo **ángulo límite** θ_2 vendrá dado por



$$\tan \phi_2 = \frac{h}{2b_1}$$

Suponiendo que fuésemos capaces de poner la superficie libre paralela a la pared vertical, de altura h , y razonando análogamente a como hacíamos para obtener la ecuación (7), tenemos que el volumen vacío del tanque será $nv = lb_1h$. Como a su vez $v = lbh$, nos queda

$$nv = lb_1h \rightarrow nlbh = lb_1h \rightarrow b_1 = nb$$

que sustituido, y adimensionalizando con el parámetro s , en $\tan \phi_2$

$$\tan \phi_2 = \frac{h}{2nb} = \frac{s}{2n} \quad (9)$$

En este caso como el ángulo final de estudio está en el intervalo $\phi_1 < \phi \leq \phi_2$, para obtener el parámetro C , la ecuación (5) habrá que dividirla en dos integrales:

$$C = \frac{1}{i_0} \left[\int_0^{\phi_1} i_\theta \cos(\phi - \theta) d\theta + \int_{\phi_1}^{\phi} i_\theta \cos(\phi - \theta) d\theta \right]$$

Donde:

- $\frac{1}{i_0} = \frac{12}{lb^3}$

- i_θ de la primera integral

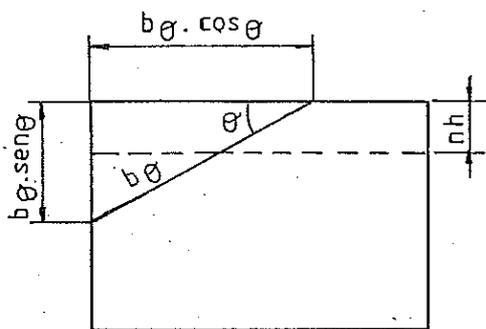
Como $0 \leq \theta \leq \phi_1$ estamos dentro del intervalo del caso B.1.1, y según ya vimos

$$i_\theta = \frac{lb_\theta^3}{12} \quad \text{con} \quad b_\theta = \frac{b}{\cos \theta} \quad \Rightarrow \quad i_\theta = \frac{lb^3}{12 \times \cos^3 \theta}$$

- i_θ de la segunda integral

Por ser también un rectángulo la superficie libre $i_\theta = \frac{lb_\theta^3}{12}$

Para obtener el b_θ de este subintervalo establecemos la igualdad de los volúmenes vacíos del tanque:



$$\text{Adrizado} \rightarrow v_{\text{vacío}} = n h l b$$

$$\text{Escorado} \rightarrow v_{\text{vacío}} = \frac{1}{2} b_{\theta} \cos \theta b_{\theta} \operatorname{sen} \theta l \Rightarrow$$

Igualando

$$n h l b = \frac{1}{2} b_{\theta}^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta l \rightarrow b_{\theta} = \sqrt{\frac{2 n h b}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}}$$

Sustituyendo

$$i_{\theta} = \frac{l b_{\theta}^3}{12} \rightarrow i_{\theta} = \frac{l}{12} \times \frac{\sqrt{8 n^3 h^3 b^3}}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta}} *$$

Llevando todos estos datos a la expresión del coeficiente C

$$C = \frac{12}{l b^3} \left[\int_0^{\phi} \frac{l b^3}{12 \cos^3 \theta} \cos(\phi - \theta) d\theta + \int_{\phi}^{\theta} \frac{l \sqrt{8 n^3 h^3 b^3}}{12} \times \frac{\cos(\phi - \theta)}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta}} d\theta \right] \rightarrow$$

$$C = \frac{b^3}{b^3} \int_0^{\phi} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\cos^3 \theta} d\theta + \frac{\sqrt{8 n^3 h^3 b^3}}{b^3} \int_{\phi}^{\theta} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta}} d\theta$$

que podemos abreviar como

$$C = I + \frac{\sqrt{8 n^3 h^3 b^3}}{b^3} II$$

Por (6)

$$h = s b \rightarrow C = I + \frac{\sqrt{8 n^3 s^3 b^3 b^3}}{b^3} II \rightarrow C = I + \sqrt{8 n^3 s^3} II$$

Para resolver las integrales I y II, recordamos una vez más que el ángulo θ es el ángulo final de escora que estamos estudiando, y que por lo tanto es dado y constante a los efectos de la integración.

* Si esto mismo lo quisiéramos expresar en función del ángulo doble: $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ nos habría que-

$$\text{dado } i_{\theta} = \frac{8 l \sqrt{n^3 b^3 h^3}}{12 \sqrt{\operatorname{sen}^3(2\theta)}}$$

$$\bullet I = \int_0^{\phi} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\cos^3 \theta} d\theta$$

Esta es la misma integral del caso B.1.1

$$I = \cos \phi \tan \phi_1 + \operatorname{sen} \phi \frac{\tan^2 \phi_1}{2}$$

Por (7): $\tan \phi_1 = 2ns \rightarrow I = 2ns \times \cos \phi + \frac{4n^2 s^2}{2} \times \operatorname{sen} \phi \rightarrow$

$$I = 2ns (\cos \phi + ns \operatorname{sen} \phi)$$

$$\bullet \Pi = \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta}} d\theta$$

$$\Pi = \cos \phi \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta}} d\theta + \operatorname{sen} \phi \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta}} d\theta \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta}} d\theta &= \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta}} = \left[-2\sqrt{\cot \theta} \right]_{\phi_1}^{\phi} = 2 \left[\sqrt{\cot \phi_1} - \sqrt{\cot \phi} \right] \\ \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 \theta \cos^3 \theta}} d\theta &= \int_{\phi_1}^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta}} = \left[2\sqrt{\tan \theta} \right]_{\phi_1}^{\phi} = 2 \left[\sqrt{\tan \phi} - \sqrt{\tan \phi_1} \right] \end{aligned} \right.$$

$$\Pi = 2 \left[\cos \phi \left(\sqrt{\cot \phi_1} - \sqrt{\cot \phi} \right) + \operatorname{sen} \phi \left(\sqrt{\tan \phi} - \sqrt{\tan \phi_1} \right) \right]$$

Por (7): $\tan \phi_1 = 2ns$ y $\cot \phi_1 = \frac{1}{2ns} \rightarrow$

$$\Pi = 2 \left[\frac{\cos \phi}{\sqrt{2ns}} - \sqrt{\frac{\cos^3 \phi}{\operatorname{sen} \phi}} + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^3 \phi}{\cos \phi}} - \operatorname{sen} \phi \sqrt{2ns} \right]$$

Sustituyendo I y II en $C = I + \sqrt{8n^3 s^3} \Pi \rightarrow$

$$C = 2ns [\cos \phi + ns \operatorname{sen} \phi] + 2\sqrt{8n^3 s^3} \left[\frac{\cos \phi}{\sqrt{2ns}} - \sqrt{\frac{\cos^3 \phi}{\operatorname{sen} \phi}} + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^3 \phi}{\cos \phi}} - \operatorname{sen} \phi \sqrt{2ns} \right]$$

$$C = 2ns [\cos\phi + ns \operatorname{sen}\phi] + 4ns \cos\phi - 2ns \sqrt{8ns} \sqrt{\frac{\cos^3\phi}{\operatorname{sen}\phi}} + 2ns \sqrt{8ns} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^3\phi}{\cos\phi}} - 8n^2s^2 \operatorname{sen}\phi$$

$$C = 2ns \left\{ \cos\phi + ns \operatorname{sen}\phi + 2 \cos\phi + \sqrt{8ns} \left[\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^3\phi}{\cos\phi}} - \sqrt{\frac{\cos^3\phi}{\operatorname{sen}\phi}} \right] - 4ns \operatorname{sen}\phi \right\}$$

$$C = 2ns \left\{ 3 \cos\phi - 3ns \operatorname{sen}\phi + \sqrt{8ns} \left[\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^4\phi}{\cos\phi \operatorname{sen}\phi}} - \sqrt{\frac{\cos^4\phi}{\operatorname{sen}\phi \cos\phi}} \right] \right\}$$

$$C = 2ns \left\{ 3 \cos\phi - 3ns \operatorname{sen}\phi + \sqrt{8ns} \left[\frac{\operatorname{sen}^2\phi - \cos^2\phi}{\sqrt{\operatorname{sen}\phi \cos\phi}} \right] \right\}$$

Esta expresión la podemos simplificar haciendo:

$$\operatorname{sen}^2\phi - \cos^2\phi = -\cos(2\phi) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\phi \times \cos\phi = \frac{\operatorname{sen}(2\phi)}{2} \quad \rightarrow$$

$$C = 2ns \left\{ 3 \cos\phi - 3ns \operatorname{sen}\phi - \sqrt{8ns} \frac{\sqrt{2} \cos(2\phi)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\phi)}} \right\} \quad \rightarrow$$

$$C = 2ns \left\{ 3 \cos\phi - 3ns \operatorname{sen}\phi - 4 \sqrt{ns} \frac{\cos(2\phi)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\phi)}} \right\} \quad \text{para} \quad 2ns < \tan\phi \leq \frac{s}{2n}$$

B.1.3. La superficie libre toca el techo y el fondo

En este caso $\theta_2 < \theta \leq 90^\circ$, por lo que para obtener el parámetro C correspondiente a un ángulo de escora θ , dado, la expresión (5) habrá que dividirla en tres integrales:

$$C = \frac{1}{i_0} \left[\int_0^{\theta_1} i_\theta \cos(\phi - \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} i_\theta \cos(\phi - \theta) d\theta + \int_{\theta_2}^{\phi} i_\theta \cos(\phi - \theta) d\theta \right]$$

siendo:

- $\frac{1}{i_0} = \frac{12}{lb^3}$
- i_θ de la primera integral

Como $0 \leq \theta \leq \theta_1$ estamos en el caso B.1.1, y según ya vimos

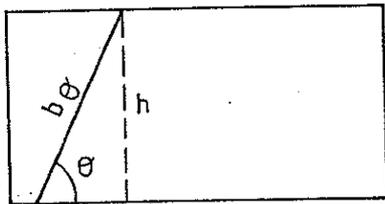
$$i_{\theta} = \frac{lb^3}{12 \times \cos^3 \theta}$$

- i_{θ} de la segunda integral

En este subintervalo $\theta_1 < \theta \leq \theta_2$ que es el caso B.1.2, con lo que

$$i_{\theta} = \frac{l}{12} \times \frac{\sqrt{8n^3 h^3 b^3}}{\sqrt{\sin^3 \theta \cos^3 \theta}}$$

- En la tercera integral $\theta_2 < \theta \leq \theta$, y para obtener i_{θ} , al ser la superficie libre un rectángulo, $i_{\theta} = \frac{lb_{\theta}^3}{12}$



Observando la figura vemos que $b_{\theta} = \frac{h}{\sin \theta}$, que sustituido nos queda:

$$i_{\theta} = \frac{lh^3}{12 \times \sin^3 \theta}$$

Trasladando todo esto a C

$$C = \frac{12}{1b^3} \left[\int_0^{\phi_1} \frac{1b^3}{12 \cos^3 \theta} \cos(\phi - \theta) d\theta + \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{1}{12} \times \frac{\sqrt{8n^3 h^3 b^3}}{\sqrt{\sin^3 \theta \cos^3 \theta}} \cos(\phi - \theta) d\theta + \int_{\phi_2}^{\phi} \frac{1h^3}{12 \sin^3 \theta} \cos(\phi - \theta) d\theta \right]$$

$$C = \frac{b^3}{b^3} \int_0^{\phi_1} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\cos^3 \theta} d\theta + \frac{\sqrt{8n^3 h^3 b^3}}{b^3} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\sqrt{\sin^3 \theta \cos^3 \theta}} d\theta + \frac{h^3}{b^3} \int_{\phi_2}^{\phi} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\sin^3 \theta} d\theta$$

Como por (6) $h = b \times s$ nos queda:

$$C = \int_0^{\phi_1} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\cos^3 \theta} d\theta + \frac{b^3}{b^3} \sqrt{8n^3 s^3} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\sqrt{\sin^3 \theta \cos^3 \theta}} d\theta + \frac{s^3 b^3}{b^3} \int_{\phi_2}^{\phi} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\sin^3 \theta} d\theta$$

Poniéndolo más abreviadamente como en el caso anterior

$$C = I + \sqrt{8n^3 s^3} II + s^3 III$$

Resolvemos cada integral de forma individual

$$\bullet I = \int_0^{\phi_1} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\cos^3 \theta} d\theta$$

Esta es la integral ya resuelta del caso B.1.1

$$I = \cos \phi \tan \phi_1 + \text{sen} \phi \frac{\tan^2 \phi_1}{2}$$

Por (7): $\tan \phi_1 = 2ns \rightarrow I = 2ns \cos \phi + 2n^2 s^2 \text{sen} \phi$

$$\bullet II = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\sqrt{\text{sen}^3 \theta \cos^3 \theta}} d\theta$$

Esta es la segunda integral del caso B.1.2

$$II = 2 \left[\cos \phi \left(\sqrt{\cot \phi_1} - \sqrt{\cot \phi_2} \right) + \text{sen} \phi \left(\sqrt{\tan \phi_2} - \sqrt{\tan \phi_1} \right) \right]$$

Por (7) $\tan \phi_1 = 2ns$ y por (9) $\tan \phi_2 = \frac{s}{2n} \rightarrow$

$$II = 2 \left[\cos \phi \left(\frac{1}{\sqrt{2ns}} - \sqrt{\frac{2n}{s}} \right) + \text{sen} \phi \left(\sqrt{\frac{s}{2n}} - \sqrt{2ns} \right) \right]$$

$$\bullet III = \int_{\phi_2}^{\phi} \frac{\cos(\phi - \theta)}{\text{sen}^3 \theta} d\theta$$

$$III = \cos \phi \int_{\phi_2}^{\phi} \frac{\cos \theta}{\text{sen}^3 \theta} d\theta + \text{sen} \phi \int_{\phi_2}^{\phi} \frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \int_{\phi_2}^{\phi} \frac{\cos \theta}{\text{sen}^3 \theta} d\theta = \left[-\frac{\cot^2 \theta}{2} \right]_{\phi_2}^{\phi} = \frac{1}{2} [\cot^2 \phi_2 - \cot^2 \phi] \\ \int_{\phi_2}^{\phi} \frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta} = [-\cot \theta]_{\phi_2}^{\phi} = \cot \phi_2 - \cot \phi \end{cases}$$

$$III = \frac{\cos \phi}{2} [\cot^2 \phi_2 - \cot^2 \phi] + \text{sen} \phi [\cot \phi_2 - \cot \phi]$$

por (9) $\tan \phi_2 = \frac{s}{2n} \rightarrow III = \frac{\cos \phi}{2} \left(\frac{4n^2}{s^2} - \cot^2 \phi \right) + \text{sen} \phi \left(\frac{2n}{s} - \cot \phi \right)$

Reincorporando todas estas expresiones en $C = I + \sqrt{8n^3s^3} \text{ II} + s^3 \text{ III}$, nos queda:

$$C = 2ns \cos \phi + 2n^2s^2 \operatorname{sen} \phi + 2\sqrt{8n^3s^3} \left[\cos \phi \left(\frac{1}{\sqrt{2ns}} - \sqrt{\frac{2n}{s}} \right) + \operatorname{sen} \phi \left(\sqrt{\frac{s}{2n}} - \sqrt{2ns} \right) \right] + s^3 \left[\frac{\cos \phi}{2} \left(\frac{4n^2}{s^2} - \cot^2 \phi \right) + \operatorname{sen} \phi \left(\frac{2n}{s} - \cot \phi \right) \right]$$

$$C = 2ns \cos \phi + 2n^2s^2 \operatorname{sen} \phi + \cos \phi \left[\frac{4ns\sqrt{2ns}}{\sqrt{2ns}} - \frac{4ns\sqrt{2ns}\sqrt{2n}}{\sqrt{s}} \right] + \operatorname{sen} \phi \left[\frac{4ns\sqrt{2ns}\sqrt{s}}{\sqrt{2n}} - 4ns\sqrt{2ns}\sqrt{2ns} \right] + \cos \phi \left[\frac{4n^2s^3}{2s^2} - \frac{s^3}{2} \cot^2 \phi \right] + \frac{s^3 2n}{s} \operatorname{sen} \phi - s^3 \operatorname{sen} \phi \cot \phi$$

Simplificando, y teniendo en cuenta que en el último término $\operatorname{sen} \phi \cot \phi = \cos \phi$ nos queda:

$$C = 2ns \cos \phi + 2n^2s^2 \operatorname{sen} \phi + 4ns \cos \phi (1 - 2n) + \operatorname{sen} \phi (4ns^2 - 8n^2s^2) + \cos \phi \left(2n^2s - \frac{s^3}{2} \cot^2 \phi \right) + 2ns^2 \operatorname{sen} \phi - s^3 \cos \phi$$

$$C = \cos \phi (2ns + 4ns - 8n^2s + 2n^2s) + \operatorname{sen} \phi (2n^2s^2 + 4ns^2 - 8n^2s^2 + 2ns^2) - \cos \phi \left(s^3 + \frac{s^3}{2} \cot^2 \phi \right)$$

$$C = \cos \phi (6ns - 6n^2s) + \operatorname{sen} \phi (6ns^2 - 6n^2s^2) - \cos \phi \left(s^3 + \frac{s^3}{2} \cot^2 \phi \right)$$

$$C = 6ns(1-n) \cos \phi + 6ns^2(1-n) \operatorname{sen} \phi - \frac{s^3}{2} \cos \phi (2 + \cot^2 \phi)$$

$$C = s \left[6n(1-n) (\cos \phi + s \operatorname{sen} \phi) - \frac{s^2}{2} \cos \phi (2 + \cot^2 \phi) \right] \quad \text{para } \tan \phi > \frac{s}{2n}$$

Consideraciones:

- Si hoy en día tuviésemos que aplicar todo este desarrollo, con un ordenador y un programa de cálculo, o incluso con una calculadora científica programable, no

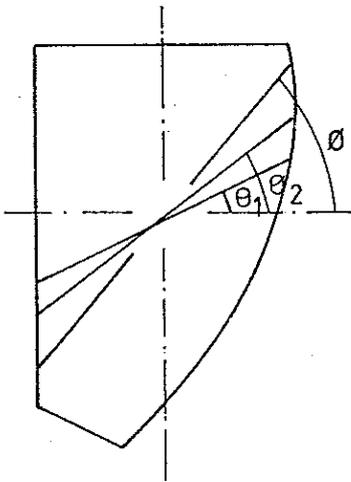
presentaría una gran dificultad. Incluso para tabular los valores de C sería suficiente con considerar tres grados de llenado: 95% ($n = 0,05$), 75% ($n = 0,25$) y 50% ($n = 0,5$). Esta última situación, de llenado al 50%, es la más desfavorable por dar lugar a los **mayores efectos escorantes** ya que las cuñas tienen el mayor volumen posible para un ángulo dado.

- Cuando las formas de algún tanque las aproximemos al paralelepípedo ortoédrico, debemos adoptar una "postura conservadora" o "pesimista", es decir, debemos estar seguros de que los valores del momento por superficies libres que hemos calculado van a ser mayores que los que se produzcan en la realidad. No obstante tampoco conviene exagerar, así, por ejemplo, un tanque que tuviese una sección transversal en forma de trapecio, como $s = h/b$, para obtener un pequeño margen de seguridad utilizaríamos la manga b menor o, análogamente, el puntal h mayor.

B.2. Prisma recto proa-popa de sección transversal constante pero no rectangular

En este caso la expresión general (3) es la misma

$$M_\phi = \gamma_l \int_0^\phi i_\theta \cos(\phi - \theta) d\theta$$



y los pasos generales para calcular estos momentos serían:

1. Dibujamos la sección transversal del tanque por el punto medio de su eslora. Marcamos las líneas de las superficies libres, según el grado de llenado que nos interese: en la situación de adrizado y para distintos ángulos de escora (procurando mantener la condición de que en todos ellos el volumen del líquido, o vacío, se mantenga constante).
2. Al ser el tanque de forma prismática, la superficie libre siempre será un rectángulo, por lo que para cada ángulo

$$i_\theta = \frac{1}{12} l b_\theta^3$$

3. La integral de M_ϕ se resolvería aplicando algún método de integración aproximada, por ejemplo el de Simpson.

B.3. Forma irregular

Este es el caso más complejo que se nos puede presentar. Si coincide que el tanque es de pequeñas dimensiones, su efecto será reducido, y podríamos obviar la dificultad calculando el momento por superficies libres como si fuese prismático rectangular; para ello supondríamos, por ejemplo, el puntal máximo del tanque y su manga media.

Si el tanque es de grandes dimensiones (por ejemplo los piques de proa y popa) su efecto puede que ya no sea tan pequeño. En este caso tendríamos que hacer una doble integración (utilizando el método de Simpson, por ejemplo):

1. Para una serie de ángulos de escora θ tendríamos que calcular el momento de inercia de sus superficies libres respecto del eje que pasa por sus respectivos centros de gravedad

$$i_{\theta} = \int_0^l \frac{y_{\theta}^3}{3} dx + \int_0^l \frac{(y'_{\theta})^3}{3} dx$$

Evidentemente hay que procurar, que al trazar las distintas superficies libres para calcular los i_{θ} , el volumen del líquido, o del vacío, se mantenga siempre constante.

2. Finalmente para cada ángulo ϕ de estudio

$$M_{\phi} = \gamma_l \int_0^{\phi} i_{\theta} \cos(\phi - \theta) d\theta$$

SUPERFICIES LIBRES EN TANQUES ESFÉRICOS

Este tipo de tanques se suele presentar en algunos buques especiales, como los dedicados al transporte de gas licuado del petróleo o natural (LPG y LNG). Al ser muy conocidas las propiedades geométricas de la esfera, su aplicación para el cálculo de los efectos de las superficies libres no presenta gran dificultad.

Disminución de la altura metacéntrica

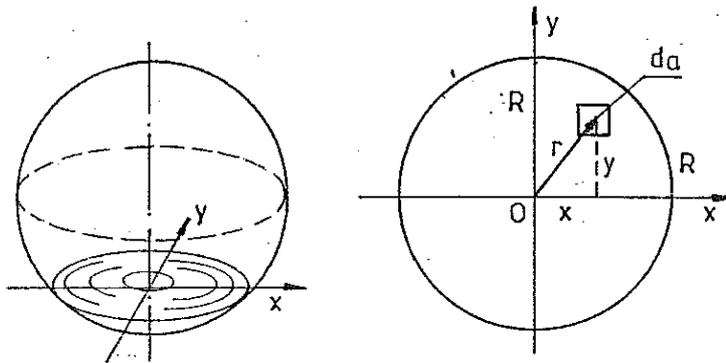
Según ya hemos comentado, la disminución que sufre la altura metacéntrica por la presencia de una superficie libre viene dada por la expresión

$$GG_0 = \frac{i\gamma}{\Delta}$$

siendo i , en este caso, el momento de inercia de la superficie libre del líquido adrizado respecto del eje longitudinal, proa-popa, que pasa por su centro de gravedad.

En el caso que nos ocupa, y con nuestras hipótesis habituales de trabajo, la superficie libre siempre será un círculo. Debido a la simetría radial de este área, su centro de gravedad estará en el centro del círculo, y el momento de inercia será el mismo respecto a cualquier eje que pase por su centro de gravedad.

Vamos a recordar cómo se obtenía el momento de inercia del círculo respecto de un eje central.



Sea un círculo de radio R , centro en O y dos ejes ortonormales x, y , cualesquiera, con origen en O

Si consideramos un elemento genérico de área da que se encuentra a una distancia r del centro del círculo O , su momento de inercia polar será $di_o = r^2 da$, y el de todo el círculo

$$i_o = \int di_o = \int_0^R r^2 da$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$, al sustituir

$$i_o = \int r^2 da = \int (x^2 + y^2) da = \int x^2 da + \int y^2 da$$

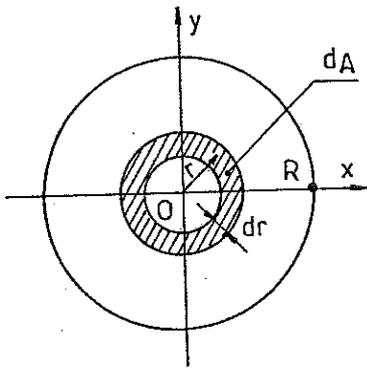
pero $\int x^2 da$ es el momento de inercia del círculo respecto del eje y , lo que podemos llamar i_y , y análogamente $i_x = \int y^2 da$. Luego $i_o = i_x + i_y$.

Ahora bien, debido a la simetría radial del círculo

$$i_x = i_y \quad \rightarrow \quad i_o = i_x + i_y = 2i_x \quad \rightarrow \quad i_x = \frac{i_o}{2}$$

Por tanto lo único que tenemos que hacer es obtener la expresión del momento de inercia polar del círculo, i_o , y dividirla por 2 para obtener el momento i_x que buscamos.

Para desarrollar i_o vamos a considerar un elemento de área dA que tenga una distribución uniforme respecto del centro O . Consideremos un anillo de radio r y anchura dr .



$$dA = 2\pi r dr$$

$$i_o = \int_0^R r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{R^4}{4} \rightarrow$$

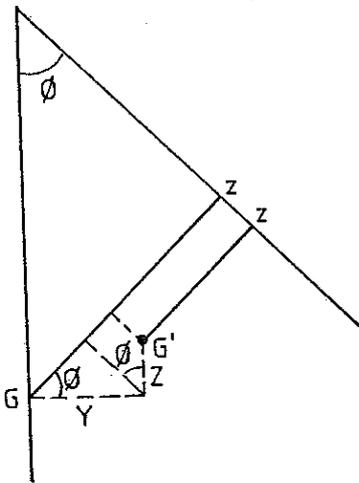
$$i_o = \frac{\pi R^4}{2}$$

Sustituyendo esta expresión en $i_x = \frac{i_o}{2}$ nos queda

$$i_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

que es la fórmula que hay que emplear para calcular la elevación virtual del centro de gravedad, y obtener la altura metacéntrica corregida G_oM .

Disminución del brazo adrizante δGz



Como ya vimos, una de las formas de obtener la disminución del brazo adrizante para un ángulo de escora ϕ dado, era mediante la expresión:

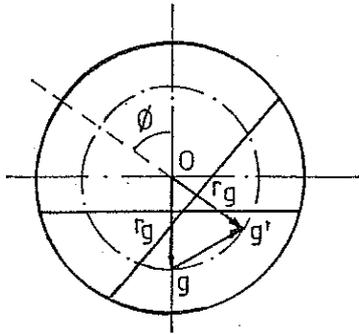
$$\delta Gz = Y \times \cos \phi + Z \times \text{sen} \phi$$

en la que Y y Z eran las componentes horizontal y vertical, respectivamente, de la variación de la posición del centro de gravedad del buque ($G \rightarrow G'$). Esta variación era debida al traslado de la cuña de líquido, lo que a su vez repercutía en una variación de la posición del centro de gravedad de todo el líquido que hay en el tanque.

Ahora, en este caso, vamos a trabajar con **todo el líquido dentro del tanque**, en vez de las cuñas. Así, el momento de transferencia nos queda:

$$Y = \frac{p \times y}{\Delta} \quad ; \quad Z = \frac{p \times z}{\Delta}$$

siendo p el peso de **todo** el líquido dentro del tanque, e y y z las componentes horizontal y vertical, respectivamente, de la variación del centro de gravedad ($g \rightarrow g'$) de todo este líquido.

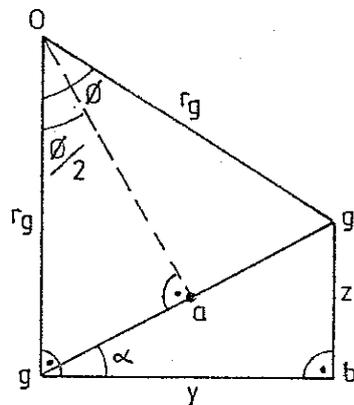
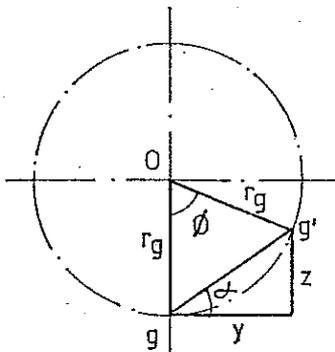


Para nuestro razonamiento vamos a suponer que el volumen del líquido es igual o menor que el 50% de la capacidad del tanque.

Sea r_g la distancia desde el centro de la esfera O hasta el centro de gravedad g del segmento esférico, que es la figura geométrica que forma el líquido en el tanque.

Quando se escora el buque, al ser el tanque una esfera, la figura geométrica del volumen del líquido no cambia, es decir, en todo momento será un segmento esférico, y con el mismo volumen. Además el valor absoluto de r_g se mantendrá constante, cualquiera que sea la escora, y la perpendicular a la superficie libre que pasa por el centro de gravedad del líquido siempre pasará también por el centro de la esfera. Por tanto el lugar geométrico formado por todos los centros de gravedad del líquido, para las infinitas escoras, será una circunferencia con centro en O y radio r_g .

Supongamos una escora dada θ . El centro de gravedad de todo el líquido del tanque se habrá trasladado desde g (posición de adrizado) hasta g' (posición correspondiente a la escora θ). Sean y y z las componentes horizontal y vertical, respectivamente, del segmento gg' .



Si observamos las figuras anteriores vemos que al proyectar

$$\left. \begin{aligned} y &= gg' \times \cos \alpha \\ z &= gg' \times \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

Por otro lado el triángulo gog' es isósceles por tener dos lados iguales (r_g), y por tanto su bisectriz, altura y mediana (oa) coinciden. Según esto:

- Si consideramos los triángulos rectángulos oag y gbg' vemos que tienen dos lados perpendiculares entre ellos

$$oa \perp gg' \quad y \quad og \perp gb \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\phi}{2}$$

- Proyectando en el triángulo oag .

$$ga = \frac{gg'}{2} = r_g \times \text{sen} \frac{\phi}{2} \quad \rightarrow \quad gg' = 2 \times r_g \times \text{sen} \frac{\phi}{2}$$

Sustituyendo estas expresiones en las componentes y y z anteriores

$$\left. \begin{array}{l} y = gg' \times \cos \alpha \\ z = gg' \times \text{sen} \alpha \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2r_g \text{sen} \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} \\ z = 2r_g \text{sen} \frac{\phi}{2} \text{sen} \frac{\phi}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2r_g \frac{\text{sen} \phi}{2} \\ z = 2r_g \frac{(1 - \cos \phi)}{2} \end{array} \right\}$$

que sustituidas a su vez en las componentes Y y Z de la variación del centro de gravedad del buque

$$\left. \begin{array}{l} Y = \frac{P y}{\Delta} \\ Z = \frac{P z}{\Delta} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} Y = \frac{P}{\Delta} r_g \text{sen} \phi \\ Z = \frac{P}{\Delta} r_g (1 - \cos \phi) \end{array} \right\}$$

con lo que la disminución del brazo adrizante δGz nos queda

$$\delta Gz = Y \cos \phi + Z \text{sen} \phi = \frac{P}{\Delta} r_g \text{sen} \phi \cos \phi + \frac{P}{\Delta} r_g (1 - \cos \phi) \text{sen} \phi$$

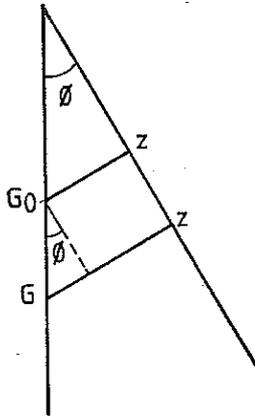
$$\delta Gz = \frac{P r_g}{\Delta} [\text{sen} \phi \cos \phi + (1 - \cos \phi) \text{sen} \phi] = \frac{P r_g}{\Delta} [\text{sen} \phi \cos \phi + \text{sen} \phi - \text{sen} \phi \cos \phi]$$

$$\boxed{\delta Gz = \frac{P \cdot r_g}{\Delta} \text{sen} \phi}$$

Numéricamente esta expresión es equivalente a suspender (trasladar) todo el peso P del líquido dentro del tanque al centro de la esfera O (distancia de traslado r_g).

En efecto, si considerásemos el momento de transferencia, $\frac{p \times r_g}{\Delta}$ equivaldría a una elevación virtual GG_0 del centro de gravedad del buque

$$GG_0 = \frac{p \times r_g}{\Delta}$$



Si Gz es el brazo adrizante sin superficies libres, el brazo adrizante con superficies libres será

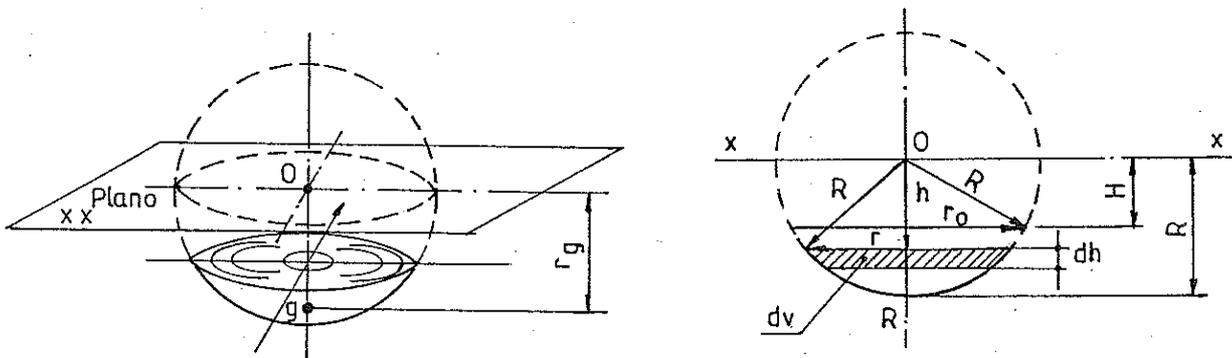
$$Gz_{cons.l.} = Gz_{sin.s.l.} - \delta Gz = Gz - \frac{p \cdot r_g}{\Delta} \text{sen} \phi = Gz - GG_0 \text{sen} \phi = G_0 z$$

Obviamente esta idea de elevación virtual del centro de gravedad del buque al "suspender" el peso del líquido del centro de la esfera, solamente es válida con este planteamiento, y **no se puede generalizar** para cualquier tanque.

Finalmente para obtener δGz necesitamos calcular p y r_g .

- p

El peso del líquido del tanque será $p = \gamma_l \times v$, siendo v el volumen del segmento esférico.



Para calcular v tomamos como dv rebanadas de círculos paralelos a su plano base, de radio genérico r .

$$d v = A_{\text{cir.}} \times d h = \pi r^2 d h \quad \text{siendo a su vez} \quad r^2 = R^2 - h^2$$

con lo que el volumen v

$$v = \int d v = \int A_{\text{cir.}} d h = \int_H^R \pi r^2 d h \quad \rightarrow \quad r^2 = R^2 - h^2 \quad \rightarrow$$

$$v = \int_H^R \pi (R^2 - h^2) d h = \pi \left[R^2(R - H) - \frac{R^3 - H^3}{3} \right] = \pi \left[R^3 - R^2 H - \frac{R^3 - H^3}{3} \right] \rightarrow$$

$$v = \pi \left[\frac{3R^3 - 3R^2 H - R^3 + H^3}{3} \right] = \frac{\pi}{3} [2R^3 - 3R^2 H + H^3] \quad \rightarrow$$

$$v = \frac{\pi}{3} (R - H)^2 (2R + H)$$

• r_g

La distancia r_g desde el centro de la esfera hasta el centro de gravedad del segmento esférico, o lo que es lo mismo, la distancia desde el plano diametral hasta el plano paralelo que pasa por el centro de gravedad del segmento, se obtiene con el cociente

$$r_g = \frac{M_{xx}}{v}$$

siendo M_{xx} el momento estático de volumen del segmento esférico respecto del plano diametral XX paralelo a su plano base. La base del segmento suponemos que está situada a una distancia H del plano XX y que el radio de la esfera es R , según podemos ver en las figuras anteriores.

$$M_{xx} = \int d M = \int h d v \quad \rightarrow$$

$$M_{xx} = \int_H^R h \times \pi r^2 d h = \int_H^R h \pi (R^2 - h^2) d h = \pi \left[R^2 \left(\frac{R^2 - H^2}{2} \right) - \frac{R^4 - H^4}{4} \right]$$

$$M_{xx} = \pi \left[\frac{2R^4 - 2R^2 H^2 - R^4 + H^4}{4} \right] = \frac{\pi}{4} [R^4 - 2R^2 H^2 + H^4]$$

$$M_{xx} = \frac{\pi}{4} (R^2 - H^2)^2 = \frac{\pi}{4} (R + H)^2 (R - H)^2$$

Sustituyendo en r_g

$$r_g = \frac{M_{xx}}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} (R+H)^2 (R-H)^2}{\frac{\pi}{3} (R-H)^2 (2R+H)} \rightarrow \boxed{r_g = \frac{3}{4} \frac{(R+H)^2}{(2R+H)}}$$

Como ya comentamos, el caso más desfavorable se nos presenta cuando el tanque está lleno al 50%. Con esta condición el segmento esférico se nos convierte en una semiesfera. Haciendo $H = 0$ nos queda:

$$\boxed{v = \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{V_{esfera}}{2}}$$

y

$$\boxed{r_g = \frac{3}{8} R}$$

Otra alternativa para calcular δGz sería la siguiente:

Si $\delta Gz = \frac{p \cdot r_g}{\Delta} \text{sen} \phi$ con $p = \gamma_l \cdot v$ y $r_g = \frac{M_{xx}}{v}$, al sustituir

$$\delta Gz = \frac{\gamma_l \cdot v \cdot \frac{M_{xx}}{v}}{\Delta} \text{sen} \phi$$

Ahora bien, según hemos visto $M_{xx} = \frac{\pi}{4} (R^2 - H^2)^2$, si llamamos r_0 al radio del círculo que forma la superficie libre, por el teorema de Pitágoras, $R^2 - H^2 = r_0^2$, con lo que

$$M_{xx} = \frac{\pi}{4} (R^2 - H^2)^2 = \frac{\pi}{4} (r_0^2)^2 = \frac{\pi}{4} r_0^4 = i$$

siendo i el momento de inercia del círculo que representa la superficie libre respecto de un eje diametral, como ya hemos comentado anteriormente, por tanto

$$\delta Gz = \frac{\gamma_l \cdot M_{xx}}{\Delta} \text{sen} \phi = \frac{\gamma_l \cdot i}{\Delta} \text{sen} \phi = GG_0 \cdot \text{sen} \phi$$

Es decir, **en este caso particular** podemos considerar la disminución del brazo adrizante δGz como una elevación virtual del centro de gravedad GG_0 , que a su vez coincidirá con la que se utilizaba para calcular la disminución de la altura metacéntrica

$$GG_0 = \frac{p \cdot r_g}{\Delta} = \frac{\gamma_l \cdot i}{\Delta}$$

A esta misma conclusión se llega si partimos de la expresión general del momento por superficies libres

$$M_{\phi} = \gamma_l \int_0^{\phi} i_{\theta} \cos(\phi - \theta) d\theta$$

como la superficie libre siempre es un círculo de radio r_0 , su momento de inercia no cambia con el ángulo de escora, $i_{\theta} = i$, por lo que al ser constante lo podemos sacar fuera de la integral

$$M_{\phi} = \gamma_l \int_0^{\phi} i_{\theta} \cos(\phi - \theta) d\theta = \gamma_l \cdot i \int_0^{\phi} (\cos\phi \cos\theta + \text{sen}\phi \text{sen}\theta) d\theta$$

$$M_{\phi} = \gamma_l \cdot i \left[\cos\phi \int_0^{\phi} \cos\theta d\theta + \text{sen}\phi \int_0^{\phi} \text{sen}\theta d\theta \right]$$

$$M_{\phi} = \gamma_l \cdot i \left[\cos\phi \cdot \text{sen}\phi + \text{sen}\phi (\cos 0 - \cos\phi) \right] = \gamma_l \cdot i \left[\cos\phi \cdot \text{sen}\phi + \text{sen}\phi - \text{sen}\phi \cdot \cos\phi \right]$$

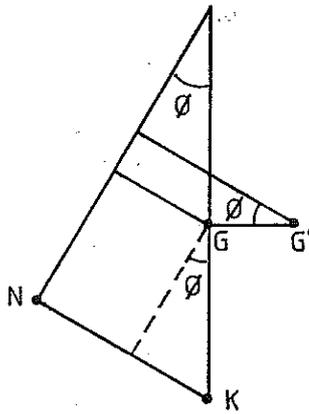
$$M_{\phi} = \gamma_l \cdot i \cdot \text{sen}\phi$$

con lo que

$$\delta G_z = \frac{M_{\phi}}{\Delta} = \frac{\gamma_l \cdot i}{\Delta} \text{sen}\phi = GG_0 \text{sen}\phi$$

Análogamente, todos estos razonamientos también son válidos para las superficies libres en tanques cilíndricos con su eje de revolución horizontal y paralelo a cruzía, aunque cambien algunos detalles, pues el volumen relativo del líquido dentro del tanque no varía con la escora.

- A la banda contraria



$$G'z_{\phi} = KN_{\phi} - KG \operatorname{sen}\phi + GG' \cos\phi - \frac{\sum M_{\phi}}{\Delta}$$

TRANSPORTE DE GRANOS

Los graneleros o *bulkcarriers* son una clase de buques especializados en el transporte de mercancías sueltas, o a granel, como trigo, maíz, etc. Este tipo de carga presenta dos particularidades específicas:

- Con el tiempo se produce un cierto asentamiento de los granos, lo que provoca que su centro de gravedad descienda, y que bodegas, que inicialmente estaban completamente llenas, acaben presentando espacios vacíos en su parte superior.
- Por la propia naturaleza de estas sustancias, sus granos o componentes presentan una cierta trabazón entre sí, lo que hace que no puedan fluir libremente; así, en caso de producirse un corrimiento de la carga, ésta no vuelve a su posición primitiva, como en el caso de los líquidos.

Por lo demás, los cálculos matemáticos de un posible corrimiento de la carga se tratan de forma similar a lo que hemos visto sobre superficies libres, si bien haciendo dos salvedades:

- a) El ángulo del talud de la superficie libre del grano no tiene nada que ver con el ángulo de escora que en un momento dado pueda tener el buque.
- b) El factor de estiba (m^3 necesarios para transporta una tonelada de mercancía), no es la inversa de la densidad o el peso específico del grano.

Finalmente podemos decir que existe toda una reglamentación de la O.M.I. sobre el diseño y la forma de carga de este tipo de buques, si bien su estudio no se encuentra dentro de los objetivos de esta asignatura.

CÁLCULO DE LAS SUPERFICIES LIBRES SEGÚN LA ADMINISTRACIÓN. CRITERIO PRÁCTICO.

Fuentes legales

Dentro de los objetivos de la Organización Marítima Internacional (O.M.I., I.M.O. en inglés, y antiguamente Organización Marítima Consultiva Internacional, O.M.C.I. o I.M.C.O.), está el hacer propuestas o recomendaciones a los distintos estados miembros sobre la seguridad de los buques, de forma que se adopten unas normas reconocidas internacionalmente y lo más consensuadas posible. Para que en cada estado o nación estas recomendaciones sean de obligado cumplimiento se necesita una resolución con carácter legal de algún organismo oficial, y que además se haga pública (por ejemplo en el Boletín Oficial del Estado).

Por lo que respecta a las superficies libres que estamos estudiando, las resoluciones en las que se tratan son:

- Orden Ministerial de 29 de julio de 1970 sobre normas de estabilidad de buques de carga y pasaje menores de 100 metros de eslora (B.O.E. núm. 197 de 18 de agosto de 1970 y B.O.E. núm. 236 de 2 de octubre de 1970 con la corrección de errores del anterior).
- Orden Ministerial de 29 de julio de 1970 sobre normas de estabilidad de buques pesqueros (B.O.E. núm. 198 de 19 de agosto de 1970 y B.O.E. núm. 264 de 4 de noviembre de 1970 con la corrección de errores).
- Criterios de aplicación: aparecen en el punto IV.4 de las respectivas Circulares sobre estabilidad de los distintos tipos de buques de la Inspección General de Buques. Según la Circular 14/83, a partir del 1 de enero de 1984, estos criterios también se aplican a los buques de carga o pasaje de eslora superior a 100 metros. Por tanto podemos decir que todo lo que vamos a desarrollar a continuación tiene un carácter general para todos los buques.

Cálculo

La Administración pide que el momento escorante debido a las superficies para cada tanque, M_{sl} , se calcule mediante la expresión:

$$M_{sl} = v \cdot b \cdot \gamma \cdot k_{\theta} \cdot \sqrt{\delta}$$

donde:

- M_{sl} = momento por superficie libre para una inclinación de θ grados, en Tm x m.
- v = capacidad **total del tanque** en m^3 (no la del líquido en el tanque).

b = dimensión máxima del tanque en la dirección de la manga, en metros.

γ = peso específico del líquido en el tanque, en Tm/m³.

$\delta = \frac{v}{lbh}$ = coeficiente de formas del tanque, siendo l , b y h sus dimensiones máximas en metros.

k_θ = coeficiente adimensional que venía tabulado en función de b/h y θ . Los valores intermedios se obtenían por interpolación. Su expresión matemática es:

$$\left\{ \begin{array}{ll} k_\theta = \frac{\text{sen } \theta}{12} \left[1 + \frac{\tan^2 \theta}{2} \right] \times \frac{b}{h} & \text{si } \cot \theta \geq \frac{b}{h} \\ k_\theta = \frac{\cos \theta}{8} \left[1 + \frac{\tan \theta}{b/h} \right] - \frac{\cos \theta}{12(b/h)^2} \left[1 + \frac{\cot^2 \theta}{2} \right] & \text{si } \cot \theta < \frac{b}{h} \end{array} \right.$$

Criterios para su aplicación

- Los tanques para los que el valor de M_{sl} para 30° sea menor que el producto $0,01 \times \text{Desplazamiento en rosca}$, **no es preciso** considerarlos en los cálculos:

$$M_{sl30^\circ} = v \cdot b \cdot \gamma \cdot k_{30} \cdot \sqrt{\delta} < 0,01 \cdot \Delta_R$$

- Los residuos que normalmente quedan en los tanques vacíos no se tendrán en cuenta en los cálculos.
- Dentro de un mismo servicio (agua dulce, fuel-oil, lastre, etc.), y para una determinada situación de carga, se tendrán en cuenta, en principio, sólo aquellos tanques que en algún momento dan lugar a superficie libre hasta que el buque se encuentre en la siguiente situación de carga estudiada. De entre éstos se considerarán los siguientes:
 - Los que presenten superficie libre en todo el intervalo.
 - Entre los que se consumen en un orden prefijado, los que den el mayor valor del momento por superficies libres (orden consecutivo). En el caso de que esté previsto consumir al mismo tiempo de más de un tanque (p.e., cuando haya que consumir simultáneamente de tanques simétricos respecto a crujía), se considerarán a la vez todos los tanques que, de acuerdo con el orden de consumo previsto, presenten superficie libre al mismo tiempo, eligiéndose el conjunto para el que sea mayor la suma de sus respectivos M_{sl} .

- Cuando haya varios tanques con superficies libres, la corrección total será la suma de las correcciones:

- Corrección del GM : $GG_o = \frac{\sum iy}{\Delta}$

i = momento de inercia **máximo** de las superficies libres que puedan aparecer en el tanque, en m^4 .

- Corrección de los valores del Gz : $\delta Gz = \frac{\sum M_{sl}}{\Delta}$

- **(NO SE PUEDEN CONFUNDIR AMBAS CORRECCIONES).**

- De forma análoga se corregirán también por aquellos espacios en los que puedan aparecer superficies libres por cualquier otro motivo.

Desarrollo matemático

Como ya se ha visto, la disminución del par adrizante por la presencia de superficies libres es debida al traslado del peso de una cuña de líquido. Si consideramos que Y y Z son los desplazamientos horizontal y vertical, respectivamente, que sufre el centro de gravedad del buque por este motivo, la disminución del brazo adrizante δGz venía dada por

$$\delta Gz = Y \cdot \cos \theta + Z \cdot \sin \theta \quad \text{con} \quad Y = \frac{p \cdot y}{\Delta} \quad \text{y} \quad Z = \frac{p \cdot z}{\Delta}$$

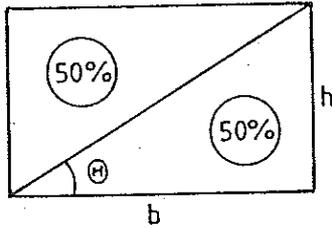
siendo p el peso de la cuña que se traslada, y la componente horizontal del desplazamiento de su centro de gravedad y z la vertical.

Las condiciones o hipótesis de partida que consideramos ahora son:

- El tanque se supone lleno al 50%, por ser la situación más desfavorable.
- De momento vamos a suponer que el tanque tiene forma de prisma recto rectangular (paralelepípedo ortoédrico), con las dimensiones correspondientes a sus valores máximos: eslora l , manga b y puntal h .

Ángulo límite

Según las hipótesis que acabamos de exponer, al estar el tanque lleno al 50% y ser de sección rectangular y constante a lo largo de su eslora, el ángulo límite se producirá cuando la superficie libre toque a la vez las dos aristas extremas del tanque.

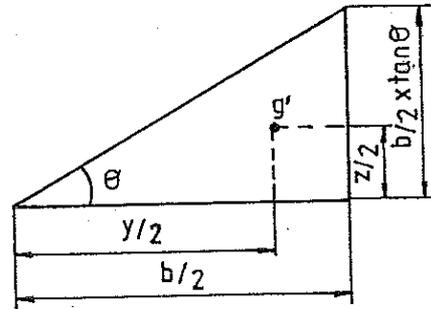
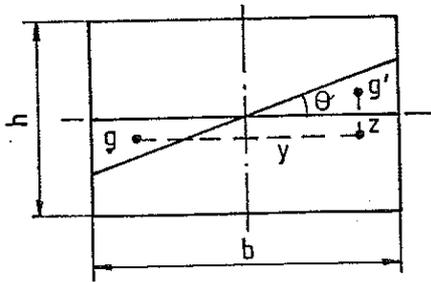


Ángulo límite: $\tan\theta = \frac{h}{b} \Rightarrow \theta = \arctan(h/b)$
 o según las Circulares: $\cot\theta = \frac{b}{h}$

Este ángulo nos delimitará dos intervalos:

Intervalo A ($\theta \leq \arctan(h/b)$ o $\cot\theta \geq b/h$)

Sean g y g' los centros de gravedad de las cuñas que desaparece y surge, respectivamente.



Sustituyendo las expresiones Y y Z del momento de transferencia en δG_z

$$\delta G_z = \frac{p \cdot y}{\Delta} \times \cos\theta + \frac{p \cdot z}{\Delta} \times \sin\theta$$

Desarrollemos cada componente

• p

El peso p de la cuña será igual al volumen v de ésta (área de la sección, que en este caso es un triángulo, por la eslora del tanque), multiplicado por el peso específico del líquido.

$$\left. \begin{aligned} p &= v \cdot \gamma \\ v &= A_s \cdot l \\ A_s &= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} \times \frac{b}{2} \tan\theta \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow p = \frac{1}{8} b^2 l \tan\theta \gamma$$

• y

Por tener cada cuña la sección transversal constante a lo largo de su eslora, las coordenadas transversales de toda la cuña coincidirán con las de su sección transversal. Como en este caso la sección es un triángulo tendremos:

$$\frac{y}{2} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{b}{2}\right) \rightarrow y = \frac{2}{3} b$$

• z

Análogamente

$$\frac{z}{2} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{b}{2} \tan \theta\right) \rightarrow z = \frac{b}{3} \tan \theta$$

Sustituyendo

$$\delta Gz = \frac{p y}{\Delta} \cos \theta + \frac{p z}{\Delta} \operatorname{sen} \theta \rightarrow$$

$$\delta Gz = \frac{\left(\frac{1}{8} b^2 l \tan \theta \gamma\right) \left(\frac{2}{3} b\right)}{\Delta} \cos \theta + \frac{\left(\frac{1}{8} b^2 l \tan \theta \gamma\right) \left(\frac{b}{3} \tan \theta\right)}{\Delta} \operatorname{sen} \theta \rightarrow$$

$$\delta Gz = \frac{l b^3 \gamma}{12 \Delta} \left(\tan \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \tan^2 \theta \operatorname{sen} \theta \right)$$

como $\tan \theta \cdot \cos \theta = \operatorname{sen} \theta$

$$\delta Gz = \frac{l b^3 \gamma}{12 \Delta} \left(\operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2} \tan^2 \theta \operatorname{sen} \theta \right) \rightarrow \delta Gz = \frac{l b^3}{12} \times \frac{\gamma}{\Delta} \times \operatorname{sen} \theta \left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta \right) *$$

Si llamamos k_θ a la expresión

$$k_\theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{12} \left(1 + \frac{\tan^2 \theta}{2} \right) \frac{b}{h}$$

para incorporarla a δGz tenemos que multiplicar y dividir por b/h

* Si esto mismo lo quisiéramos expresar en función del momento de inercia de la superficie libre adrizada

$i_o = \frac{l b^3}{12}$ nos habría quedado $\delta Gz = \frac{i_o \gamma}{\Delta} \operatorname{sen} \theta \left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta \right)$, que coincide con la expresión que ya vimos anteriormente cuando tratamos el tanque de paredes verticales.

$$\delta G_z = \frac{l b^3 \gamma}{12 \Delta} \operatorname{sen} \theta \left(1 + \frac{\tan^2 \theta}{2} \right) = \frac{l b^3}{\Delta} \frac{h}{b} \gamma \frac{\operatorname{sen} \theta}{12} \left(1 + \frac{\tan^2 \theta}{2} \right) \frac{b}{h} \rightarrow$$

$$\delta G_z = \frac{l b^2 h}{\Delta} \gamma k_\theta$$

Si el coeficiente de formas del tanque es $\delta = \frac{v}{l b h} \Rightarrow l b h = \frac{v}{\delta}$

$$\delta G_z = \frac{v}{\Delta} b \gamma k_\theta \frac{1}{\delta}$$

Ahora bien, hasta aquí hemos estado suponiendo que el tanque es prismático rectangular. Para dar más generalidad, y de alguna manera tratar de incluir todos los tipos de tanques, se aproxima $1/\delta$ a $\sqrt{\delta}$

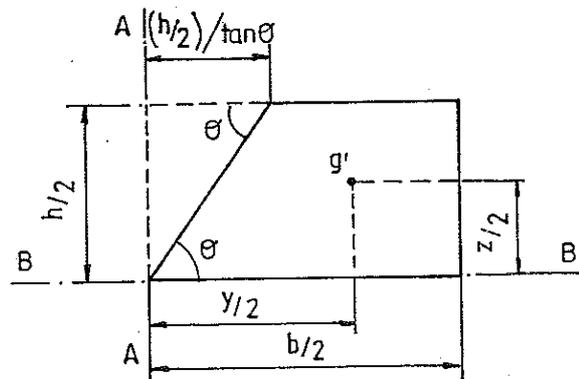
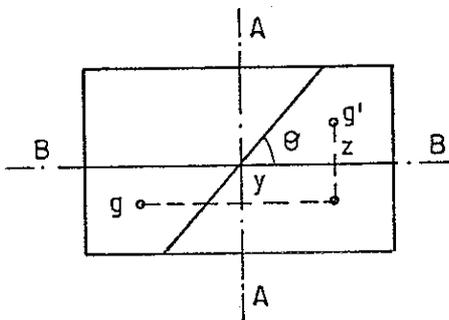
$$\delta G_z = \frac{v b \gamma k_\theta}{\Delta} \sqrt{\delta}$$

Como el momento escorante debido a las superficies libres, o más resumidamente, el momento por superficies libres, era $M_{sl} = \Delta \delta G_z$, nos queda

$$M_{sl} = v b \gamma k_\theta \sqrt{\delta}$$

Intervalo B ($\theta > \operatorname{arc} \tan (h/b)$ o $\cot \theta < b/h$)

En este caso, como el ángulo de estudio ya ha superado al ángulo límite, la superficie libre correspondiente tocará el techo y el fondo del tanque



Como en el intervalo anterior

$$\delta Gz = \frac{P \cdot y}{\Delta} \times \cos \theta + \frac{P \cdot z}{\Delta} \times \sen \theta$$

• p

$$p = v \cdot \gamma = A_s \cdot l \cdot \gamma$$

En este caso la sección transversal de la cuña es un trapecio, y lo vamos a considerar formado por un rectángulo $\left[\left(\frac{b}{2} \right) \times \left(\frac{h}{2} \right) \right]$, menos un triángulo

$$\left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{h}{2} \right) \times \frac{\left(\frac{h}{2} \right)}{\tan \theta} \right]$$

$$A_s = A_{rect.} - A_{trián.} = \frac{b}{2} \times \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{h}{2} \times \frac{h/2}{\tan \theta} = \frac{bh}{4} - \frac{h^2}{8} \cot \theta$$

con lo que

$$p = \left(\frac{bh}{4} - \frac{h^2}{8} \cot \theta \right) l \gamma \quad \rightarrow \quad p = \frac{lh\gamma}{8} (2b - h \cot \theta)$$

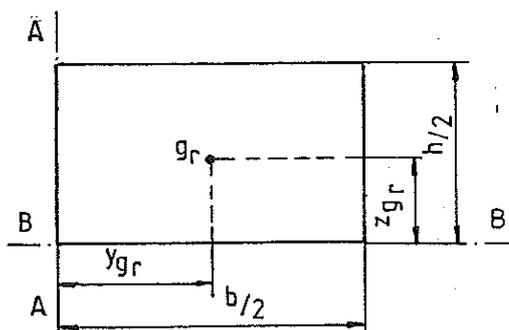
• y

Al igual que en el caso anterior, por tener la cuña una sección constante a lo largo de su eslora, las coordenadas transversales de su centro de gravedad coincidirán con las del área de su sección. Para determinar estas distancias consideremos que el momento estático del trapecio, respecto de cualquier eje, es igual al momento estático del rectángulo menos el del triángulo.

Tomando momentos respecto del eje AA

$$\frac{y}{2} \times A_s = y_{g_{rect.}} \times A_{rect.} - y_{g_{trián.}} \times A_{trián.}$$

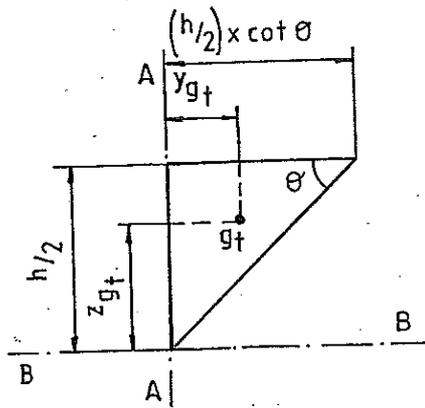
– Rectángulo



$$y_{g_{rect.}} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} \right) = \frac{b}{4}$$

$$A_{rect.} = \frac{b}{2} \times \frac{h}{2} = \frac{bh}{4}$$

- Triángulo



$$y_{gtrián.} = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} \cot \theta \right) = \frac{h}{6} \cot \theta$$

$$A_{trián.} = \frac{1}{2} \times \frac{h}{2} \times \frac{h}{2} \cot \theta = \frac{h^2}{8} \cot \theta$$

Sustituyendo en $\frac{y}{2} \times A_s = y_{grect.} \times A_{rect.} - y_{gtrián.} \times A_{trián.}$ →

$$\frac{y}{2} \times \left(\frac{bh}{4} - \frac{h^2}{8} \cot \theta \right) = \frac{b}{4} \times \frac{bh}{4} - \frac{h}{6} \cot \theta \times \frac{h^2}{8} \cot \theta \quad \rightarrow$$

$$y = \frac{\frac{b^2h}{16} - \frac{h^3}{48} \cot^2 \theta}{\frac{bh}{8} - \frac{h^2}{16} \cot \theta} = \frac{\frac{3b^2h}{48} - \frac{h^3}{48} \cot^2 \theta}{\frac{6bh}{48} - \frac{3h^2}{48} \cot \theta} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3b^2 - h^2 \cot^2 \theta}{6b - 3h \cot \theta}$$

• z

Tomando ahora momentos respecto del eje BB

$$\frac{z}{2} \times A_s = z_{grect.} \times A_{rect.} - z_{gtrián.} \times A_{trián.}$$

- Rectángulo

$$z_{grect.} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right) = \frac{h}{4}$$

- Triángulo

$$z_{gtrián.} = \frac{2}{3} \left(\frac{h}{2} \right) = \frac{h}{3}$$

Sustituyendo en $\frac{z}{2} \times A_s = z_{grect.} \times A_{rect.} - z_{gtrián.} \times A_{trián.}$

$$\frac{z}{2} \times \left(\frac{bh}{4} - \frac{h^2}{8} \cot \theta \right) = \frac{h}{4} \times \frac{bh}{4} - \frac{h}{3} \times \frac{h^2}{8} \cot \theta \quad \rightarrow$$

$$z = \frac{\frac{bh^2}{16} - \frac{h^3}{24} \cot \theta}{\frac{bh}{8} - \frac{h^2}{16} \cot \theta} = \frac{\frac{3bh^2}{48} - \frac{2h^3}{48} \cot \theta}{\frac{6bh}{48} - \frac{3h^2}{48} \cot \theta} \quad \rightarrow \quad z = \frac{3bh - 2h^2 \cot \theta}{6b - 3h \cot \theta}$$

Finalmente el momento por superficies libres quedará

$$M_{sl} = \Delta \cdot \delta Gz = \Delta (Y \times \cos \theta + Z \times \sen \theta) = \Delta \left(\frac{P \cdot y}{\Delta} \times \cos \theta + \frac{P \cdot z}{\Delta} \times \sen \theta \right) \quad \rightarrow$$

$$M_{sl} = p \cdot y \cdot \cos \theta + p \cdot z \cdot \sen \theta \quad \rightarrow \quad M_{sl} = p (y \cos \theta + z \sen \theta)$$

Sustituyendo cada elemento por su expresión

$$M_{sl} = \frac{lh\gamma}{8} (2b - h \cot \theta) \times \left[\frac{3b^2 - h^2 \cot^2 \theta}{6b - 3h \cot \theta} \cos \theta + \frac{3bh - 2h^2 \cot \theta}{6b - 3h \cot \theta} \sen \theta \right] \quad \rightarrow$$

$$M_{sl} = \frac{lh\gamma}{8} (2b - h \cot \theta) \frac{(3b^2 \cos \theta - h^2 \cot^2 \theta \cos \theta + 3bh \sen \theta - 2h^2 \cot \theta \sen \theta)}{3(2b - h \cot \theta)}$$

Teniendo en cuenta que $\cot \theta \cdot \sen \theta = \cos \theta$, y multiplicando y dividiendo por b^2

$$M_{sl} = \frac{lh\gamma}{24} (3b^2 \cos \theta - h^2 \cot^2 \theta \cos \theta + 3bh \sen \theta - 2h^2 \cos \theta) \frac{b^2}{b^2} \quad \rightarrow$$

$$M_{sl} = \frac{lh b^2 \gamma}{24} \left[\frac{3b^2 \cos \theta}{b^2} - \frac{\cot^2 \theta \cos \theta}{\left(\frac{b}{h}\right)} + \frac{3b \sen \theta}{\left(\frac{b}{h}\right)b} - \frac{2 \cos \theta}{\left(\frac{b}{h}\right)} \right]$$

y como $lbh = \frac{v}{\delta}$

$$M_{sl} = \frac{v}{\delta} b \gamma \left[\frac{3 \cos \theta}{24} + \frac{3 \sen \theta \cos \theta}{24 \left(\frac{b}{h}\right) \cos \theta} - \frac{\cos \theta \cot^2 \theta}{24 \left(\frac{b}{h}\right)} - \frac{2 \cos \theta}{24 \left(\frac{b}{h}\right)} \right] \quad \rightarrow$$

$$M_{sl} = \frac{v}{\delta} b \gamma \left[\frac{\cos \theta}{8} \left(1 + \frac{\tan \theta}{\left(\frac{b}{h}\right)} \right) - \frac{\cos \theta}{12 \left(\frac{b}{h}\right)} \left(1 + \frac{\cot^2 \theta}{2} \right) \right]$$

Llamando k_θ a la expresión entre corchetes

$$k_\theta = \frac{\cos \theta}{8} \left(1 + \frac{\tan \theta}{(b/h)} \right) - \frac{\cos \theta}{12 (b/h)} \left(1 + \frac{\cot^2 \theta}{2} \right)$$

nos queda $M_{sl} = \frac{1}{\delta} v b \gamma k_\theta$

Si, análogamente a como hicimos en el caso A, reemplazamos $\frac{1}{\delta}$ por $\sqrt{\delta}$

$$M_{sl} = v \cdot b \cdot \gamma \cdot k_\theta \cdot \sqrt{\delta}$$

Teoría del Buque

CRITERIOS DE ESTABILIDAD SEGÚN LA ADMINISTRACIÓN

Para actualizar esta información se deberían leer el *Real Decreto 1422/2002, de 27 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto 1032/1999, de 18 de junio, por el que se determinan las normas de seguridad a cumplir por los buques pesqueros de eslora igual o superior a 24 metros* (BOE núm. 311, de 28 de diciembre de 2002), y el *Real Decreto 1423/2002, de 27 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto 1247/1999, de 16 de julio, sobre reglas y normas de seguridad aplicables a los buques de pasaje que realicen travesías entre puertos españoles* (BOE núm. 311, de 28 de diciembre de 2002 y BOE núm. 313, de 31 de diciembre de 2002). Todos ellos se pueden consultar en la página correspondiente del BOE en Internet.

INTRODUCCIÓN

En general, los criterios de estabilidad que exige la Administración Española vienen recogidos en la O.M. de 29-07-70, que a su vez adoptan las recomendaciones de la O.M.I. Sin embargo, por lo que respecta a su interpretación, y a los criterios de aplicación para cada tipo de barco en concreto, hay que atenerse a las Circulares internas, y por lo tanto de carácter restringido, de la Inspección General de Buques. Los criterios de estabilidad vienen siempre en el punto número 4 de todas las Circulares sobre estabilidad.

A continuación se va a dar un resumen de cada una de ellas, si bien hay que hacer la puntualización de que en cualquier momento pueden ser modificadas, por lo que si alguna vez fuese necesario hacer una utilización profesional de estos criterios habría que remitirse a las fuentes originales. Lo que aquí se da sólo tiene un carácter didáctico.

BUQUES PESQUEROS

(Circulares núms. 9/77 sobre Estabilidad de Buques Pesqueros y 6/79 de aclaración de la anterior).

IV.- SITUACIONES DE CARGA. CRITERIOS DE ESTABILIDAD.

IV.1.- Situaciones de carga que se han de estudiar.

En principio, se deben estudiar las principales condiciones de carga previstas por el armador para la explotación del buque; en todo caso, como mínimo, se estudiarán las siguientes:

- a) Salida de puerto con el total de combustible, provisiones, hielo, aparejos de pesca, etc.*
- b) Salida de caladero completo de pesca y con el 35% de combustible, provisiones, etc.*
- c) Llegada a puerto con el 10% de provisiones, combustible, etc. y completo de pesca.*
- d) Llegada a puerto con el 10% de provisiones, combustible, etc. y el 20% de la pesca.*

En los casos que se indican a continuación, se estudiarán, además, las siguientes situaciones de carga:

e) Cuando se prevea la disposición de carga en cubierta:

e.1.- "Salida de caladero completo de pesca, con carga en cubierta y con el 35% de combustible, provisiones, etc."

e.2.- "Llegada a puerto completo de pesca con carga en cubierta y con el 10% de combustible, provisiones, etc."

f) Cuando entre dos de las situaciones consecutivas mencionadas, se proceda a llenar (por razones de estabilidad) algún tanque de lastre o bien a llenar o vaciar de líquido algún otro espacio del buque (p.e. viveros):

f.1.- En el caso de lastrado del buque "Buque en el momento antes de lastrar el buque".

f.2.- En el caso de llenado o vaciado de algún otro espacio del buque: "Buque en el momento antes del llenado o vaciado" y "Buque en el momento después del llenado o vaciado".

En aquellos buques pesqueros que procedan al llenado y vaciado sucesivo de líquidos de numerosos espacios de carga desde su salida de caladero (p.e.: los buques atuneros), no será necesario estudiar todas las situaciones intermedias siempre que quede claramente reflejado en las Instrucciones al Capitán el proceso de llenado y vaciado de los diferentes espacios y que se demuestre razonadamente que en cualquier situación intermedia se cumplen los criterios de estabilidad.

g) Cuando se prevea la necesidad de navegar en zonas de formación de hielos (según se definen en el apartado IV.5), se estudiará la situación de carga más desfavorable en el supuesto de acumulación de hielos. El cálculo se efectuará conforme al procedimiento indicado en el apartado IV.5. Se considerará como situación de carga más desfavorable aquella, de entre las indicadas en los puntos a), b), c), d), e) y f) de este apartado, que presente un menor valor de estabilidad dinámica a 30°.

IV.2.- Criterios de estabilidad.

Las curvas de estabilidad de todas las situaciones carga especificadas en el apartado IV.1, deberán cumplir lo indicado en el apartado 5.1 de la O.M. de 29.07.70, es decir:

a) El área que quede debajo de la curva de brazos adrizantes no será inferior a 0,055 m.rad. hasta el ángulo de escora de 30° ni inferior a 0,09 m.rad. hasta 40° o hasta el ángulo de inundación θ_i , si este ángulo es menor de 40°. Además, el área que quede debajo de la curva de brazos adrizantes entre los ángulos de escora de 30° y 40° o entre 30° y θ_i , si este ángulo es menor de 40°, no será inferior a 0,03 m.rad.
(θ_i es el ángulo definido en el apartado 5.1 a de la O.M. de 29.7.70).

b) El brazo adrizante será de 200 mm. como mínimo, para un ángulo de escora igual o superior a 30°.

c) El brazo adrizante máximo corresponderá a un ángulo de escora no inferior a 25°.

d) La altura metacéntrica inicial corregida no será inferior a 350 mm.

Además, y para los casos que se mencionan, se deberá cumplir los siguiente:

e) El ángulo de escora que puede ocasionar el inicio de la inundación de las bodegas a través de las escotillas que permanecen abiertas durante las faenas de pesca, será como mínimo de 20°. Esto se comprobará en la situación de carga indicada en el punto b) del apartado IV.1.

En el caso de que dicho ángulo sea menor a 20° deberá demostrarse que el buque cumple con lo indicado en los puntos a), b), c) y d) de este apartado para la siguiente situación, que habrá de estudiarse expresamente:

~ "Buque con 75% de consumos, sin carga y bodegas inundadas al 50% de su volumen".

f) En los buques cuyos métodos de pesca sometan a los mismos a fuerzas externas adicionales que creen momentos transversales, deberá demostrarse que el buque no sumerge ningún punto de la cubierta cuando dichas fuerzas están actuando.

A estos efectos, la fuerza a considerar será igual a la máxima que puede actuar transversalmente cuando la maquinilla de pesca o el halador esté desarrollando su tiro máximo; la situación de la carga a considerar será la de "Salida de Caladero con 35% de consumos y 100% de pesca".

g) En los buques que dispongan de dispositivos antibalance, deberá demostrarse que, para todas las situaciones de carga mencionadas en el apartado IV.1, se cumplen los criterios de estabilidad indicados en los puntos a), b), c) y d) de este apartado, cuando se usan dichos dispositivos.

h) Cuando en condición de carga más desfavorable, la estabilidad dinámica a 30° sea inferior a 0,065 m.rad., deberá estudiarse lo siguiente:

1) La aptitud del buque para resistir el efecto de escora provocado por los efectos de rachas de viento y balance intenso. Para ello, se calculará el valor del coeficiente C_1 . El significado de este coeficiente y en general el procedimiento para calcular el efecto del viento se indica en el apartado IV.7.

2) La aptitud del buque para resistir el efecto de escora provocado por la presencia de agua en cubierta. Para ello, se calculará el valor del coeficiente C_2 . El significado de este coeficiente y, en general, el procedimiento para calcular el efecto de agua en cubierta se indicará en el apartado IV.6.

IV.3.- Consideraciones a tener en cuenta en los cálculos.

a) *En general, se hará uso de las curvas hidrostáticas y de los valores KN trazadas para el asiento de proyecto, pero en aquellas situaciones en que el asiento calculado de servicio difiera en más de $0,02 L_{pp}$ o en más de 1 m. del asiento de proyecto, los valores de GZ de la curva de estabilidad estática se disminuirán en 0,02 m. No obstante se admitirá también el cálculo directo de las curvas de estabilidad para el asiento real. Asimismo, cuando se considere necesario, se podrá exigir dicho cálculo directo.*

b) *Conforme a lo indicado en la O.M. de 29.07.70:*

En circunstancias especiales se podrán tener en cuenta las superestructuras que se consideren cerradas, realizando los cálculos de estabilidad hasta el ángulo para el que comienza la entrada de agua, siempre que esto no dé lugar a una inundación peligrosa del buque (en este ángulo, la curva de estabilidad estática deberá tener uno o más escalones y en los cálculos siguientes no deberá considerarse el espacio inundado).

En los casos en que el buque pudiera llegar a zozobrar por inundación a través de alguna abertura, la curva de estabilidad se interrumpirá en el ángulo de inundación correspondiente a dicha abertura, y se considerará que el buque, en ese instante, ha perdido su estabilidad.

No se considerarán como abiertos los orificios pequeños, tales como los que permiten el paso de cables, cadenas, aparejos y anclas, así como los imbornales, los orificios de descargas sanitarias y las tuberías de aireación siempre que se sumerjan para un ángulo de inclinación superior a 30° . Si se sumergen para un ángulo igual o inferior a 30° , esos orificios se considerarán abiertos si la Administración considera que pueden dar lugar a una inundación de cierta importancia.

c) *En las situaciones de carga b, c, d, e, f y g del apartado IV.1, se debe considerar por separado un margen para tener en cuenta el peso de las redes mojadas y su maniobra.*

d) *En todos los casos, la carga se supondrá homogénea, a menos que esto resulte incompatible con la práctica, lo cual habrá de demostrarse explícitamente.*

e) *El agua de lastre se deberá incluir sólo si el buque dispone de tanques especialmente dispuestos para este fin.*

f) *El valor considerado como peso en bodega en la situación de carga d) del apartado IV.1 debe ser el 20% del valor considerado como peso en bodega en las situaciones b) y c).*

g) *La altura metacéntrica inicial y los brazos adrizantes habrán de corregirse por*

efecto de superficies libres conforme al procedimiento indicado en el apartado IV.4.

h) Las curvas de estabilidad se dibujarán hasta el ángulo de inundación con trazo continuo y a partir de este punto, con trazo discontinuo.

IV.4.- Efecto de líquidos en los tanques y otros espacios donde puedan aparecer superficies libres.

a) El valor de M_{sl} para cada tanque es el obtenido por la fórmula:

$$M_{sl} = v \cdot b \cdot \gamma \cdot k \cdot \sqrt{\delta}$$

en donde:

M_{sl} = Momento por superficie libre para una inclinación de θ grados, en tonelámetros.

v = Capacidad total del tanque en metros cúbicos.

b = Dimensión máxima del tanque en la dirección de la manga, en metros.

γ = Peso específico del líquido contenido en el tanque, en toneladas por metro cúbico.

δ = $v/b.l.h.$

l = Dimensión máxima del tanque en la dirección de la eslora, en metros.

k = Coeficiente adimensional que se obtiene de la tabla, en función de b/h y θ . Los valores intermedios se determinan por interpolación. La citada tabla es la incluida en el Apéndice I de la O.M. de 29-07-70.

b) Los tanques para los que el valor de M_{sl} para 30° sea menor que el producto $0,01 \times$ Desplazamiento en rosca, no es preciso que sean considerados en los cálculos.

c) Los residuos de los líquidos que queden normalmente en los tanques vacíos no se tendrán en cuenta en los cálculos.

d) Dentro del mismo servicio (agua dulce, lastre, fuel-oil, gas-oil, etc.) y para una determinada situación de carga, se tendrán en cuenta en principio, sólo aquellos tanques que en algún momento dan lugar a superficie libre hasta que el buque se encuentre en la siguiente situación de carga estudiada. De entre éstos sólo se considerarán los siguientes:

Los que presenten superficies libres en todo el intervalo, y

Entre los que se consumen en un orden prefijado, los que den el mayor valor del momento por superficie libre. En el caso de que esté previsto consumir al mismo tiempo de más de un tanque (por ejemplo, cuando haya que consumir simultáneamente de tanques simétricos respecto a crujía), se considerarán a la vez todos los tanques que, de acuerdo con el orden de consumos previsto, presenten superficie libre al mismo tiempo, eligiéndose el conjunto para el que sea mayor la suma de sus respectivos momentos por superficie libre.

e) La corrección será la suma de las correcciones correspondientes a los tanques de cada servicio.

e.1.-

$$\text{Corrección del GM} = \frac{\sum i \cdot \gamma}{\Delta}$$

i = Momento de inercia máximo de las superficies libres que puedan aparecer en el tanque en m^4 .

e.2.-

$$\text{Corrección de los valores GZ} = \frac{\sum M_{s1}}{\Delta}$$

para cada ángulo θ .

f) De forma análoga se corregirán también por aquellos espacios en que pueda aparecer superficie libre por cualquier otro motivo.

IV.5.- Método para calcular los efectos por acumulación de hielo.

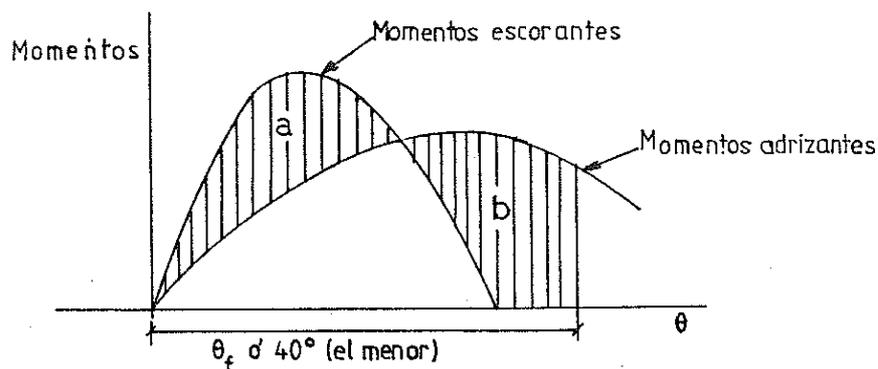
Se considerarán como zonas susceptibles de originar acumulación de hielo las indicadas en el Apéndice III de la O.M. de 29-07-70. Asimismo, el procedimiento para tener en cuenta esta acumulación será el indicado en el mencionado Apéndice III.

Se incluirá un esquema (a escala) de las superficies consideradas así como un cálculo detallado de sus valores.

IV.6.- Método para calcular los efectos del agua en cubierta.

1) El coeficiente C_2 se define como la relación:

$$C_2 = \frac{\text{área "b''}}{\text{área "a''}} \text{ de la figura adjunta}$$



- 2) El ángulo que encierra el área "b" debe ser igual al ángulo de inundación θ , o 40 grados si esta magnitud es menor.
- 3) El valor del momento escorante (M_e) debido a la presencia del agua en cubierta debe ser determinado teniendo en cuenta lo siguiente:

El peso de agua embarcada se calculará suponiendo que sobre cubierta existe una cantidad de agua igual a la que existiría si el pozo de cubierta estuviese lleno de agua hasta el punto más bajo de la línea de regala y el buque, inicialmente adrizado, es escorado hasta el ángulo necesario para que el punto indicado quede sumergido. Una vez determinado el peso de agua, se calculará M_e para cada ángulo de escora, teniendo en cuenta tanto la variación de la posición del centro de gravedad del agua embarcada como las posibles pérdidas de este agua por la amura.

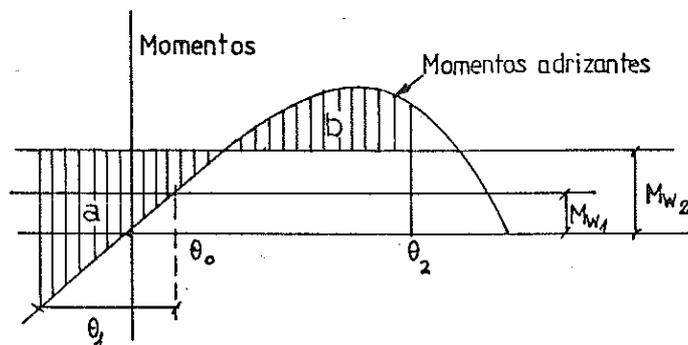
Al calcular M_e se partirá de las siguientes hipótesis:

- a) *Durante la escora, los valores de asiento y desplazamiento son constantes e iguales a los correspondientes para el buque sin agua en cubierta.*
- b) *Se ignorará el efecto de las portas de desagüe.*
- c) *La situación de carga a considerar será la más desfavorable.*

IV.7.- Método para calcular los efectos del viento y balance intensos.

- 1) *Se supone que la fuerza del viento sobre cada parte lateral del costado del buque expuesta al viento tiene la misma dirección que éste y que dicha fuerza actúa a una altura por encima del nivel del agua igual a la altura sobre dicho nivel del baricentro del área proyectada de la mencionada parte del costado.*

2)



M_{w1} = Momento escorante provocado por un viento constante ($Tm \times m$) = $K_1 \cdot S \cdot H \cdot v^2$

K_1 = Coeficiente = $7,6 \times 10^5$

v = Velocidad del viento = 27,77 m/seg.

S = Superficie lateral proyectada del buque por encima de la línea de flotación (m^2).

H = Longitud del brazo de palanca medida entre el baricentro de S y $d/2$ (m).

d = Calado medio (m).

M_{w2} = Momento escorante provocado por una racha de viento o por un viento intenso = $1,5 M_{w1}$ ($Tm \times m$).

θ_0 = Ángulo de escora provocado por un viento constante (grados).

θ_1 = 20 grados.

3)

$$C_1 = \frac{\text{área "b''}}{\text{área "a''}}$$

IV.8.- Estabilidad después de averías.

Los buques cuya eslora sea igual o superior a 100 metros y que lleven a bordo 100

o más personas, deben permanecer a flote con estabilidad positiva, de un modo que la Inspección General juzgue satisfactorio, después de inundarse cualquier compartimiento que se suponga averiado.

REMOLCADORES

(Circular núm. 2/79 sobre Estabilidad de Remolcadores).

IV.-SITUACIONES DE CARGA. CRITERIOS DE ESTABILIDAD.

IV.1.- Situaciones de carga que se han de estudiar.

En principio, se deben estudiar las principales condiciones de carga previstas por el Armador para la explotación del buque, en todo caso, como mínimo se estudiarán las siguientes:

- IV.1.1.- Salida de puerto totalmente cargado con carga homogénea distribuida por todos los espacios de carga y con el total de combustibles y provisiones.*
- IV.1.2.- Llegada a puerto en las mismas condiciones que en el apartado anterior, pero con un 10% de combustible y provisiones.*
- IV.1.3.- Cuando entre las dos situaciones mencionadas se proceda a llenar, por razones de estabilidad algún tanque de lastre, la condición "Buque inmediatamente antes de lastrar".*
- IV.1.4.- Cuando se prevea la necesidad de navegar en zonas de formación de hielo, se estudiará la situación de carga más desfavorable en el supuesto de acumulación de hielos. Se consideraría como situación de carga más desfavorable, de las indicadas en este apartado, la que presente un valor menor de la estabilidad dinámica a 30°.*

IV.2.- Criterios de estabilidad.

Las curvas de estabilidad de las situaciones de carga indicadas en el apartado 4.1 deberán cumplir los siguientes criterios:

- IV.2.1. a) El área bajo la curva de brazos adrizantes (curva de valores GZ) no será inferior a 0,055 metros-radianes hasta el ángulo de inclinación de 30° ni inferior a 0,090 metros-radianes hasta el ángulo de inclinación de 40°, o hasta el ángulo de comienzo de la inundación a través de las aberturas, si éste es menor de 40°. Asimismo, el área bajo la curva de brazos adrizantes entre los ángulos de inclinación de 30° y de 40°, o entre los ángulos de 30° y el de comienzo de la inundación a través de*

las aberturas, si este es menor de 40°, no será inferior a 0,03 metros-radianes.

- b) El brazo adrizante GZ será como mínimo de 0,20 metros para un ángulo de inclinación igual o superior a 30°.
- c) El brazo adrizante máximo corresponderá a un ángulo de escora que no será inferior a 25°.
- d) La altura metacéntrica inicial no será inferior a 0,35 metros.

IV.2.2. El ángulo de escora que tomará el remolcador al estar sometido, por separado, a cada uno de los momentos escorantes que se indican a continuación, y para cuya escora se produzca el equilibrio estático entre el momento escorante aplicado y el momento adrizante del remolcador (desplazamiento x brazo GZ correspondiente al ángulo de escora) será inferior al necesario para que se produzca la zozobra del remolcador o su inundación a través de las aberturas.

Los momentos escorantes a considerar son los siguientes:

a)

$$M_1 = \frac{1}{19,6} \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \gamma \cdot V^2 \cdot A_p (h \cdot \cos \theta + C_3 \cdot C_m)$$

M_1 = Momento escorante en tonelámetros.

C_1 = Coeficiente de tracción lateral (figura 1).

C_2 = Corrección de C_1 por el ángulo de escora (figura 2).

γ = Peso específico del agua, en toneladas/metro cúbico.

V = Velocidad lateral del buque remolcador = 2,57 metros/segundo (5 nudos).

A_p = Área de la proyección sobre el plano diametral de la parte sumergida del remolcador, en metros cuadrados.

h = Altura del gancho de remolque sobre la flotación, en metros.

θ = Ángulo de escora.

C_3 = Distancia del centro de presión del área A_p a la flotación, expresada como fracción del calado medio real (figura 3).

C_m = Calado medio real, en metros.

b)

$$M_2 = C_4 \cdot C_5 \cdot T \cdot (h \cdot \cos \theta + C_6 \cdot C_m)$$

siendo:

M_2 = Momento escorante, en tonelámetros.

C_4 = Fracción del tiro máximo a punto fijo del remolcador que se puede suponer que actúa transversalmente = 0,70.

C_6 = Corrección de C_4 por la posición longitudinal del gancho de remolque (figura 4).

T = Tiro máximo a punto fijo del remolcador en toneladas.

C = Distancia a la flotación del centro de resistencia efectivo, como fracción del calado = 0,52.

h , C_m y θ tienen los mismos significados que en la fórmula del momento escorante M_1 .

c) Cuando el buque esté provisto de un dispositivo de gancho giratorio, previa conformidad de la Inspección General, se podría añadir en los paréntesis de las fórmulas de los momentos escorantes M_1 y M_2 un término substractivo de la forma:

$$r \cdot \text{sen } \theta$$

siendo r el radio de giro, en metros. Para ello será preciso que se incluyan los planos del gancho de remolque en el libro de estabilidad.

El valor de T que figura en la fórmula del momento escorante M_2 se deberá medir mediante una prueba de tracción a punto fijo del remolcador, realizada en presencia de la Inspección de Buques local o, en caso de no ser esto posible, mediante un Certificado expedido por una sociedad de clasificación, a satisfacción de la Inspección General de Buques.

En circunstancias especiales, cuando en algún buque sea imposible satisfacer todos los requisitos de estabilidad mencionados anteriormente, a causa del tipo de servicio que haya de prestar o de sus condiciones particulares de proyecto, la Inspección General de Buques podría eximir a algún remolcador de cumplir las normas establecidas, siempre que se acompañe para ello un estudio detallado en el que se demuestre que las condiciones de estabilidad del buque son totalmente satisfactorias para sus condiciones de trabajo, en todos los estados de carga previsibles.

IV.3.- Consideraciones a tener en cuenta en los cálculos.

- IV.3.1. Análogo al apartado IV.3.a. de la Circular sobre Buques Pesqueros relativo a la disminución de los brazos GZ por efecto del trimado.*
- IV.3.2. Análogo al apartado IV.3.b. de la Circular sobre Buques Pesqueros relativo a la consideración de la superestructura.*
- IV.3.3. Análogo al apartado IV.3.d. de la Circular sobre Buques Pesqueros relativo a la homogeneidad de la carga.*
- IV.3.4. Análogo al apartado IV.3.g. de la Circular sobre Buques Pesqueros relativo al efecto de las superficies libres.*
- IV.3.5. Análogo al apartado IV.3.h. de la Circular sobre Buques Pesqueros relativo al trazado de las curvas de estabilidad.*
- IV.3.6. Cuando un buque transporte carga sobre cubierta se indicará su peso, así como la altura de su centro de gravedad.*
- IV.3.7. En la situación de carga indicada en el apartado 4.1.1. se supondrá que el buque está cargado hasta su línea de carga de verano con los tanques de lastre vacíos.*

IV.4.- Efecto de los líquidos en los tanques y en otros espacios donde pueden aparecer superficies libres.

Exactamente lo mismo que en el apartado IV.4 de la Circular sobre Estabilidad de Buques Pesqueros relativo al efecto de las superficies libres.

Apéndices.

Figuras 1, 2, 3 y 4.

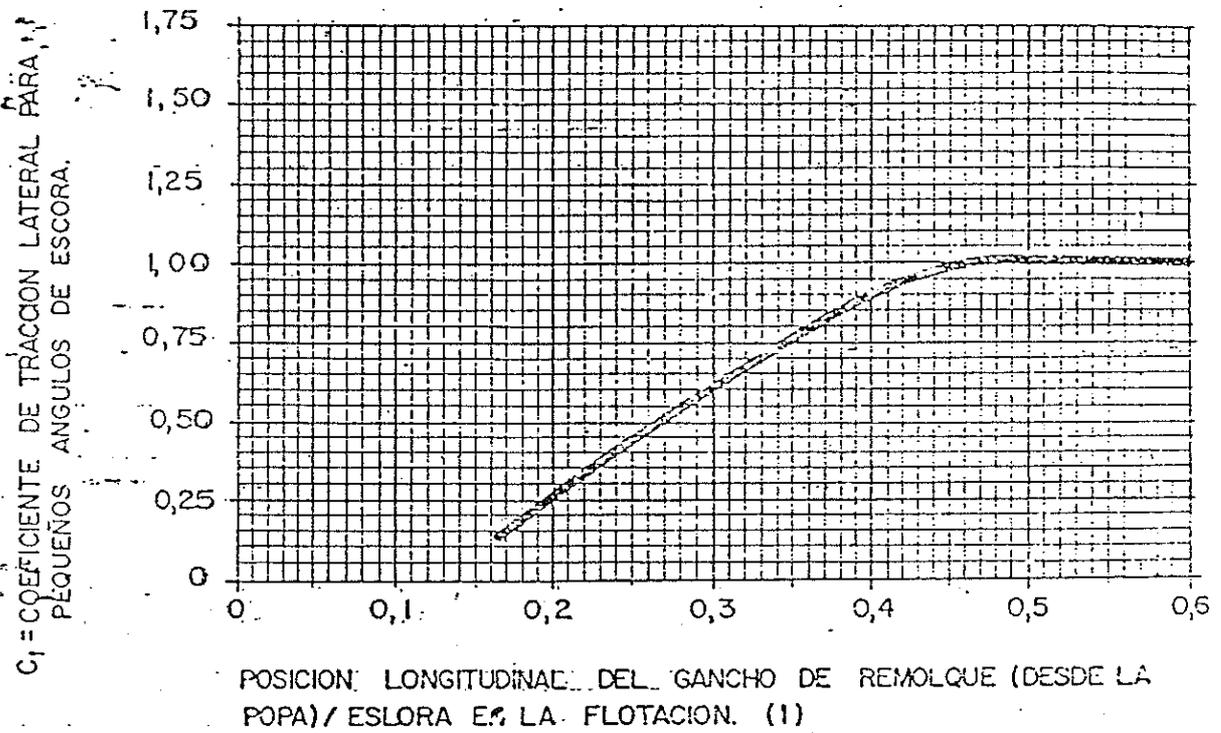


FIGURA I.- COEFICIENTE DE TRACCION LATERAL PARA ESTIMACIONES DE LAS FUERZAS EXTERNAS SOBRE EL REMOLCADOR.

(1) En buques provistos de dispositivo de gancho giratorio, se tomará como posición longitudinal del gancho, la del punto de giro.

C_2 = COEFICIENTE DE TRACCION LATERAL APARENTE/
 COEFICIENTE DE TRACCION LATERAL CON ESCORA NULA

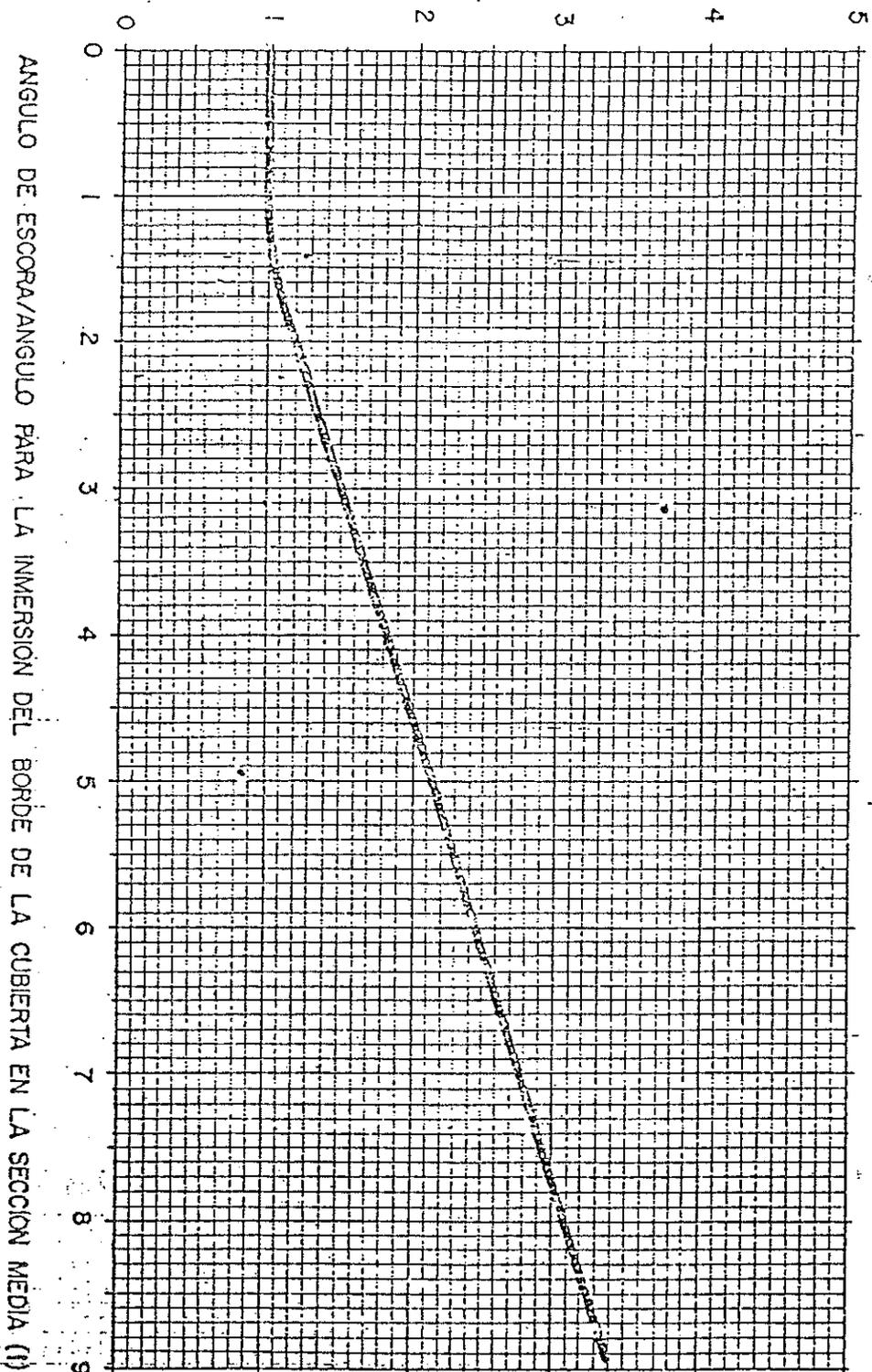
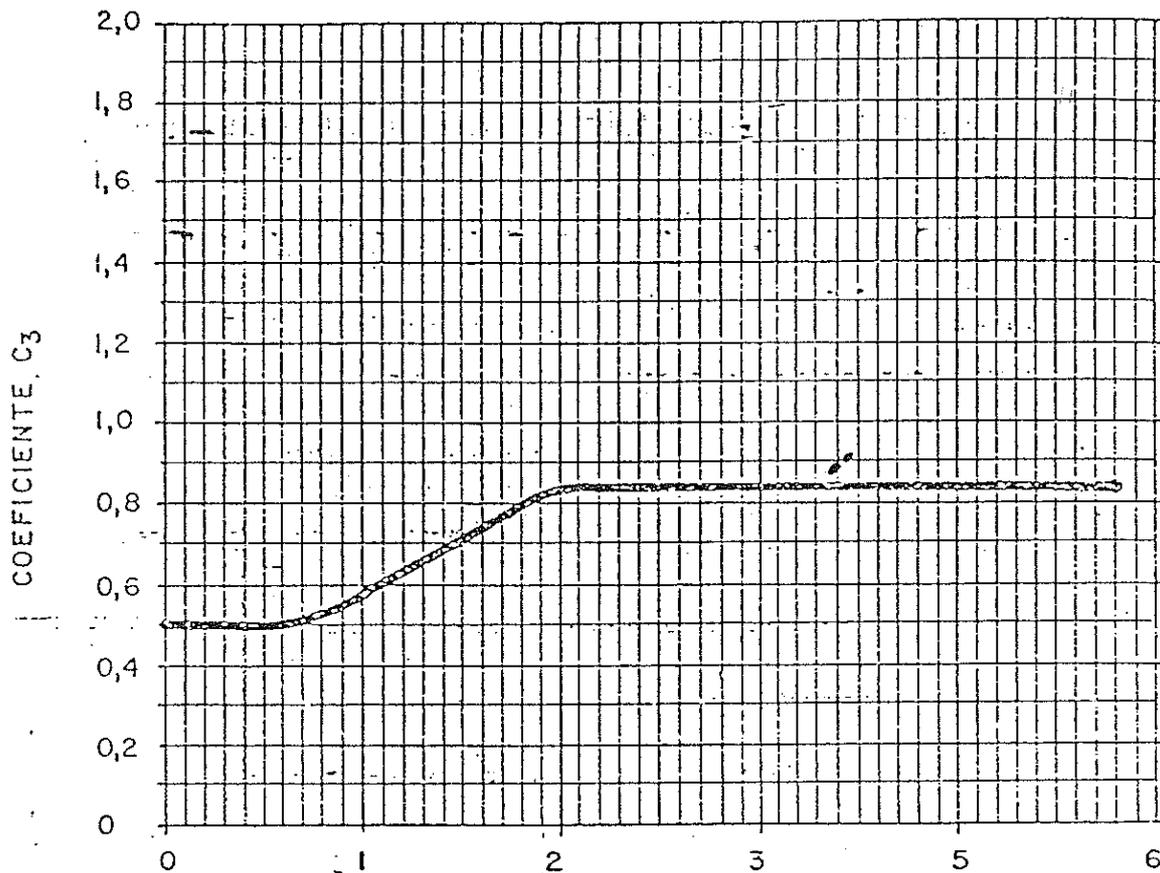


FIGURA 2.- RELACION DEL COEFICIENTE DE TRACCION LATERAL - ANJULO ESCORA NORMALIZADO

(1) Si el buque tiene una superestructura en la sección media se consideraría el borde de la cubierta como si tal superestructura no existiera.



ANGULO DE ESCORA/ANGULO PARA LA INMERSION DEL BORDE DE LA CUBIERTA EN LA SECCION MEDIA.

FIGURA 3.- DISTANCIA A LA FLOTACION DEL CENTRO DEL AREA A_{p1} TOMADA COMO FRACCION DEL CALADO/ANGULO DE ESCORA NORMALIZADO.

FACTOR DE CORRECCION PARA EL TIRO EFECTIVO EN EL GANCHO C₅

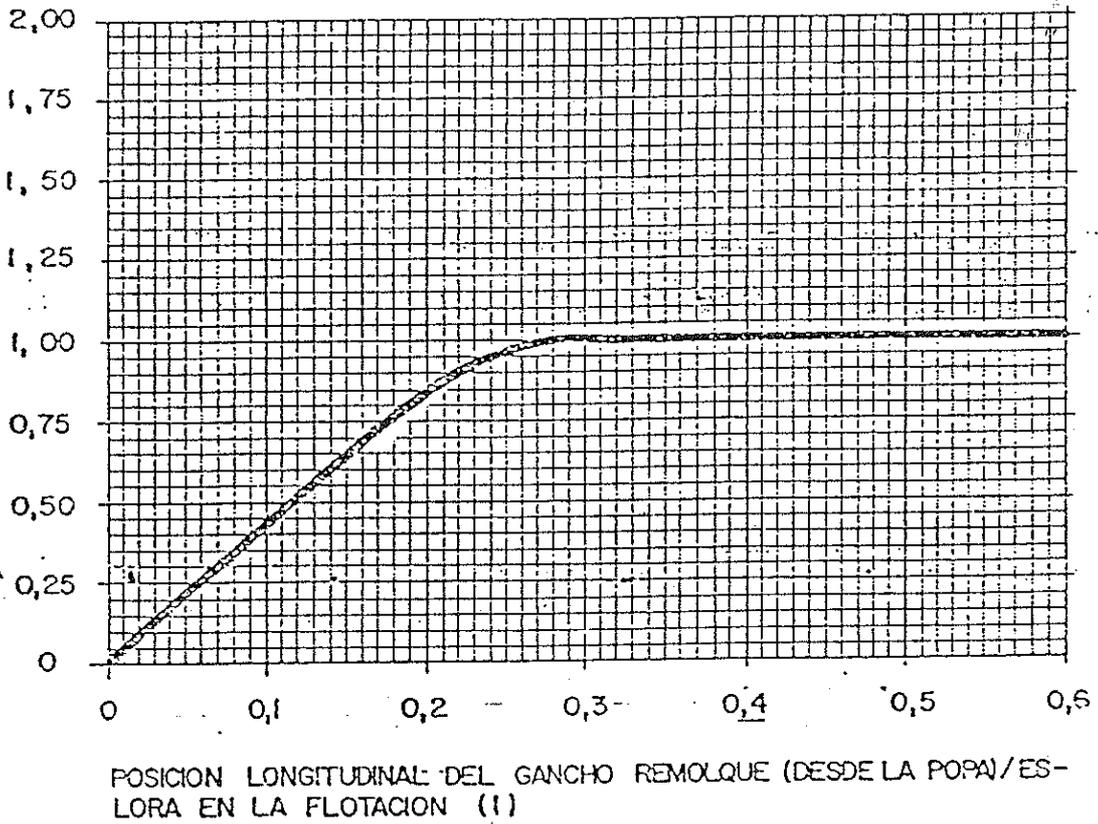


FIGURA 4.- REDUCCION EN EL MOMENTO ESCORANTE EFECTIVO-POSICION LONGITUDINAL DEL GANCHO DE REMOLQUE.

(1) En buques provistos de dispositivo de gancho giratorio, se tomará como posición longitudinal del gancho, la del punto de giro.

BUQUES DE CARGA Y PASAJE

(Circulares núms. 12/90 y 17/90 sobre Estabilidad de Buques de Carga y Pasaje Menores de 100 m. Eslora, y 16/90 sobre Estabilidad de Buques de Carga y Pasaje de Eslora Superior a 100 m.)

IV.- SITUACIONES DE CARGA. CRITERIOS DE ESTABILIDAD.

IV.1.- Situaciones de carga que se han de estudiar.

En principio se deben estudiar las principales condiciones de carga previstas por el armador para la explotación del buque; en todo caso, como mínimo, se estudiarán las siguientes:

A.- Buques de pasaje.

- A.1.-** *Salida de puerto, con el total de la carga, combustible, provisiones y pasajeros con su equipaje.*
- A.2.-** *Llegada a puerto, con el total de carga y pasajeros con su equipaje y con el 10% del combustible y de las provisiones.*
- A.3.-** *Salida de puerto, con el total de combustible, provisiones y pasajeros con su equipaje, sin carga.*
- A.4.-** *Llegada a puerto, con el total de pasajeros con su equipaje, sin carga, y con el 10% del combustible y de las provisiones.*

B.- Buques de carga.

- B.1.-** *Salida de puerto, totalmente cargado con carga homogénea distribuida de manera homogénea por todos los espacios de carga y con el total de combustibles y provisiones.*
- B.2.-** *Llegada a puerto, en las mismas condiciones que B.1. pero con un 10% de combustible y provisiones.*
- B.3.-** *Salida de puerto, en lastre y con el total de combustible y provisiones.*
- B.4.-** *Llegada a puerto, en lastre y con el 10% del combustible y provisiones.*

En los casos que se indican a continuación, se estudiarán además, las siguientes situaciones de carga:

- C.-** *Si el buque es de carga seca con tanques para carga líquida, las situacio-*

nes de carga indicadas en B.1 y B.2, se considerarán de cada una de las formas siguientes:

- C.1.- Con los tanques de carga llenos.
- C.2.- Con los tanques de carga vacíos.
- D.- Cuando se prevea la disposición de carga en cubierta:
 - D.1.- Salida de puerto, totalmente cargado con carga homogénea distribuida de manera homogénea por todos los espacios de carga, carga en cubierta, y con el total de combustible y provisiones.
 - D.2.- Llegada a puerto, en las mismas condiciones que en D.1, pero con un 10% de combustible y provisiones.
- E.- Cuando entre dos de las situaciones consecutivas mencionadas, se proceda a llenar (por razones de estabilidad) algún tanque de lastre: "Buque en el momento antes de lastrar".
- F.- Cuando se prevea la necesidad de navegar en zonas de formación de hielos (según se definen en el apartado IV.5.), se estudiará la situación de carga más desfavorable en el supuesto de acumulación de hielos. El cálculo se efectuará conforme al procedimiento indicado en el apartado IV.5. Se considerará como situación de carga más desfavorable aquella, de entre las indicadas en los puntos A), B), C), D) y E) de este apartado, que presente un menor valor de estabilidad dinámica a 30°.

IV.2.- Criterios de estabilidad.

Las curvas de estabilidad de las situaciones de carga especificadas en el apartado IV.1, deberán cumplir lo siguiente:

- A.- Buques de carga, excepto los buques madereros:
 - A.1.- El área que quede debajo de la curva de brazos adrizantes no será inferior a 0,055 m rad. hasta el ángulo de escora de 30°, ni inferior a 0,09 m rad. hasta 40° o hasta el ángulo de inundación θ_i , si este ángulo es menor de 40°. Además, el área que quede debajo de la curva de brazos adrizantes entre los ángulos de escora de 30° y 40° o entre 30° y θ_i , si este ángulo es menor de 40°, no será inferior a 0,03 m rad.
 - A.2.- El brazo adrizante será de 200 mm. como mínimo, para un ángulo de escora igual o superior a 30°.
 - A.3.- El brazo adrizante máximo corresponderá a un ángulo de escora no inferior a 25°.

A.4.- La altura metacéntrica inicial corregida no será inferior a 150 mm.

B.- Buques de pasaje.

Además de los criterios indicados en el apartado A, deberán cumplir también los siguientes:

B.1.- El ángulo de escora producido por la posición más desfavorable de los pasajeros, no debe exceder de 10°.

B.2.- El ángulo de escora por efecto de una virada no debe ser superior a 10° cuando se emplea la siguiente fórmula de cálculo:

$$M = 0,02 \frac{V^2}{L} \Delta \left(KG - \frac{d}{2} \right)$$

en donde:

M = Momento escorante en Tm x m.

V = Velocidad del crucero en m/seg.

L = Eslora en la flotación, en m.

Δ = Desplazamiento en Tm.

d = Calado medio, en m.

KG = Ordenada del centro de gravedad sobre la quilla.

C.- Buques madereros:

C.1.- El área que quede debajo de la curva de brazos adrizantes no será menor de 0,08 m x rad. hasta un ángulo de escora de 40° o hasta el ángulo de inundación, si éste es menor de 40°.

C.2.- El valor máximo del brazo adrizante (GZ) será como mínimo de 0,25 m.

C.3.- La altura metacéntrica, en la condición de salida, no será menor de 0,1 m. Durante todo el viaje el GM deberá ser positivo, y ello una vez tenidos en cuenta los siguientes efectos: corrección por los efectos de las superficies libres de los líquidos existentes en los tanques, la absorción de agua por la carga de cubierta y, cuando haya lugar, la formación de hielo en las superficies a la intemperie.

D.- En los buques que dispongan de dispositivos antibalance, deberá demostrarse que, para todas las situaciones de carga mencionadas en el apartado

IV.1., se cumplen los criterios de estabilidad indicados en los puntos A), B) o C), de este apartado, cuando se usan dichos dispositivos.

E.- Cuando en la condición de carga más desfavorable, la estabilidad dinámica a 30° sea inferior a 0,065 m. rad., deberá estudiarse lo siguiente (excepto en los buques clase G, H, J y K).

1) La aptitud del buque para resistir el efecto de escora provocado por los efectos de rachas de viento y balance intenso. Para ello, se calculará el valor del coeficiente C_1 . El significado de este coeficiente y en general el procedimiento para calcular el efecto del viento se indica en el apartado IV.7.

2) La aptitud del buque para resistir el efecto de escora provocado por la presencia de agua en cubierta. Para ello, se calculará el valor del coeficiente C_2 . El significado de este coeficiente y, en general, el procedimiento para calcular el efecto de agua en cubierta se indicará en el apartado IV.6.

IV.3.- Consideraciones a tener en cuenta en los cálculos.

a) En general, se hará uso de las curvas hidrostáticas y de los valores de KN trazadas para el asiento de proyecto, pero en aquellas situaciones en que el asiento calculado de servicio difiera en más de 0,02 L_{pp} del asiento de proyecto, los valores GZ de la curva de estabilidad estática se disminuirán en 0,02 m. No obstante, se admitirá también el cálculo directo de las curvas de estabilidad para el asiento real. Asimismo, cuando se considere necesario, se podrá exigir dicho cálculo directo.

b) Conforme a lo indicado en la O.M. de 29.07.70:

En circunstancias especiales se podrá tener en cuenta las superestructuras que se consideren cerradas, realizando los cálculos de estabilidad hasta el ángulo para el que comienza la entrada de agua, siempre que esto no dé lugar a la inundación peligrosa del buque (en este ángulo, la curva de estabilidad estática deberá tener uno o más escalones y en los cálculos siguientes no deberá considerarse el espacio inundado).

En los casos en que el buque pudiera llegar a zozobrar por inundación a través de alguna abertura, la curva de estabilidad se interrumpirá en el ángulo de inundación correspondiente a dicha abertura, y se considerará que el buque, en este instante, ha perdido su estabilidad.

c) En todos los casos, la carga se supondrá homogénea, a menos que esto resulte incompatible con la práctica, lo cual habrá de demostrarse explícitamente.

d) La altura metacéntrica inicial y los brazos adrizantes habrán de corregirse por

efecto de superficies libres conforme al procedimiento indicado en el apartado IV.4.

- e) Las curvas de estabilidad se dibujarán hasta el ángulo de inundación con trazo continuo y, a partir de este punto, con trazo discontinuo.*
- f) Cuando un buque transporte carga sobre cubierta se indicará su peso así como su altura.*
- g) Se asignará un peso de 75 kg. por cada pasajero, pudiendo reducirse a 60 kg. en casos justificados. Se indicará el peso y situación del equipaje.*
- h) La altura del centro de gravedad de cada pasajero se supondrá:
 - De un metro sobre cubierta para los pasajeros que estén de pie. Puede tenerse en cuenta, si es necesario, la brusca y el arrufo de la cubierta.*
 - De 0,3 metros sobre el asiento para pasajeros sentados.**
- i) Al comprobar, en los buques de pasaje, si se cumplen los criterios indicados en el punto A del apartado IV.2., se considerará que los pasajeros están situados en los espacios normalmente destinados para ellos.*
- j) Al comprobar si se cumplen los criterios indicados en el punto B del apartado IV.2, se considerará que los pasajeros están distribuidos de forma que se produzca la situación más desfavorable de momento de escora a la que se puede llegar en la práctica. Los pasajeros se considerarán en pie y a razón de 4 por metro cuadrado. Para ello, previamente se demostrará, para cada situación de carga, que la distribución elegida es la más desfavorable y después, se trazará la curva GZ correspondiente al nuevo KG, calculándose el ángulo de escora por la intersección de esta curva con los brazos escorantes.*
- k) En las situaciones de carga indicadas en los puntos A.1, B.1 y D.1 del apartado IV.1, se supondrá que el buque está cargado hasta su línea de carga de compartimentado, o a su línea de carga de verano para el transporte de madera en cubierta, y en cualquiera de estos casos, con los tanques de lastre vacíos.*
- l) En el caso de los buques de carga con cubertada de madera, se podrá considerar el aumento de flotabilidad del buque debido a la carga estibada sobre la cubierta, suponiendo que ésta tiene una permeabilidad igual al 25% del volumen ocupado. Deberán presentarse curvas de estabilidad para las distintas permeabilidades y/o para la supuesta altura de carga.*
- m) En los buques madereros cuando se transporte carga de madera sobre cubierta y se estudie una situación de carga diferente a la indicada en el punto D.1 del apartado IV.1, la cantidad de carga y lastre deberá ser la*

correspondiente a la peor condición de servicio en la que se cumplan todos los criterios de estabilidad indicados en el punto C del apartado IV.2.

n) En la situación de carga de llegada, en los buques madereros, se considerará que el peso de la carga de madera sobre cubierta se ha incrementado en un 10% debido a la absorción de agua.

IV.4.- Efecto de líquidos en los tanques y otros espacios donde pueden aparecer superficies libres.

Exactamente lo mismo que en el apartado IV.4 de la Circular sobre Estabilidad de Buques Pesqueros relativo al efecto de las superficies libres.

IV.5. Método para calcular los efectos por acumulación de hielo.

El peso de hielo por metro cuadrado de todas las cubiertas y pasarelas expuestas a la intemperie se supondrá no menor de 30 kg. por metro cuadrado si el buque navega al Norte de la latitud 66° 30' N., o al Sur de la latitud 60° 00' S., y en invierno en los mares de Barents, Bering y Okhotsk y el estrecho de Tatar. El peso de hielo por metro cuadrado de área lateral proyectada de la parte del buque por encima de la flotación se supondrá no menor de 15 kilogramos por metro cuadrado.

En otras áreas de la zona periódica de invierno, los tipos supuestos de acumulación de hielo en invierno serán la mitad de los definidos en el párrafo anterior.

La altura del centro de gravedad del hielo acumulado se calculará según la posición de las partes correspondientes de las cubiertas y pasarelas y otras superficies continuas en las que se pueda acumular el hielo. El área lateral proyectada de las superficies discontinuas de barandillas, arboladura (excepto palos) y jarcia de los buques que no tienen velas y el área lateral proyectada de otros pequeños objetos se calculará aumentando el área lateral proyectada total de las superficies continuas en el 5 por 100, y los momentos estáticos de este área en el 10 por 100.

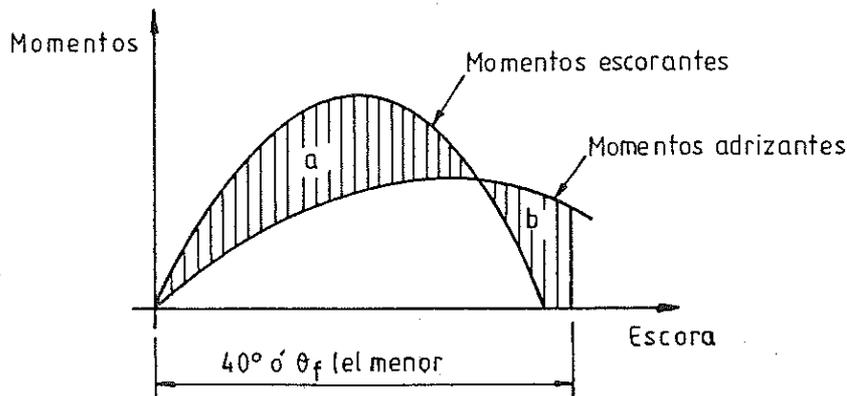
Se incluirá un esquema (a escala) de las superficies consideradas así como un cálculo detallado de sus valores.

IV.6.- Método para calcular los efectos del agua en cubierta.

1) El coeficiente C_2 se define como la relación:

$$C_2 = \frac{\text{área}''b''}{\text{área}''a''}$$

de la figura adjunta.



- 2) El ángulo que encierra el área "b" debe ser igual al ángulo de inundación θ_f , o 40 grados si esta magnitud es menor.
- 3) El valor del momento escorante (M_e) debido a la presencia del agua en cubierta debe ser determinado teniendo en cuenta lo siguiente:

El peso del agua embarcada se calculará suponiendo que sobre cubierta existe una cantidad de agua igual a la que existiría si el pozo de cubierta estuviese lleno de agua hasta el punto más bajo de la línea de regala y el buque, inicialmente adrizado, es escorado hasta el ángulo necesario para que el punto indicado quede sumergido. Una vez determinado el peso de agua, se calculará M_e para cada ángulo de escora, teniendo en cuenta tanto la variación de la posición del centro de gravedad del agua embarcada como las posibles pérdidas de este agua por la amura.

Al calcular M_e se partirá de las siguientes hipótesis:

- a) *Durante la escora, los valores de asiento y desplazamiento son constantes e iguales a los correspondientes para el buque sin agua en cubierta.*
 - b) *Se ignorará el efecto de las portas de desagüe.*
 - c) *La situación de carga a considerar será la más desfavorable.*
- 4) *El coeficiente C_2 debe ser mayor que la unidad para que la estabilidad sea satisfactoria.*

IV.7.- Método para calcular los efectos del viento y balance intensos.

Habrá que demostrar la aptitud del buque para resistir los efectos combinados del viento transversal y del balance respecto de cada condición normal de carga, con referencia a la figura, del modo siguiente:

- 1) *Se someterá el buque a la presión de un viento constante que actúe perpendicularmente al eje longitudinal, lo que dará como resultado un brazo escorante provocado por el viento constante (lw_1)*

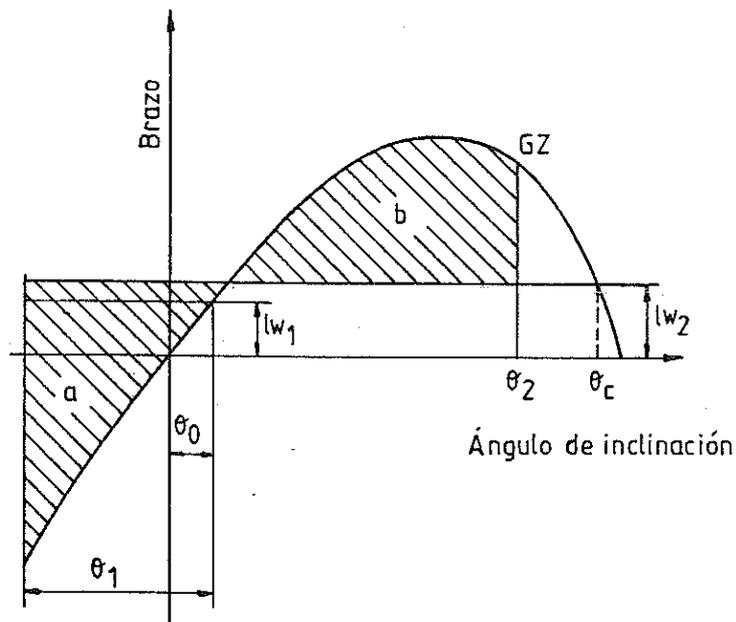


Figura - Viento y balance intensos.

Los ángulos de esta figura se definen del modo siguiente:

θ_0 = Ángulo de escora provocado por un viento constante, que se supondrá de 16° , o el 80% del ángulo de inmersión de cubierta, si este valor es menor.

θ_1 = Ángulo de balance a barlovento debido a la acción de las olas.

θ_2 = Ángulo de inundación por cambio de carena (θ_f) o 50° , o θ_c , tomando de estos valores el menor, donde:

θ_f = Ángulo de escora al que se sumergen aberturas del casco, superestructuras o casetas que no puedan cerrarse de modo estanco. Al aplicar este criterio no se considerarán las pequeñas aberturas por las que no pueda producirse una inundación progresiva.

θ_c = Ángulo de segunda interceptación entre el brazo escorante lw_2 y las curvas GZ.

Se supondrá que a partir del ángulo de equilibrio resultante (θ_0), el buque se balancea por la acción de las olas hasta alcanzar un ángulo de balance (θ_1) a barlovento.

A continuación se someterá al buque a la presión de una racha de viento que

dará como resultado un brazo escorante provocado por la racha de viento (lw_2).

En estas circunstancias, el área "b" deberá ser igual o superior al área "a".

En las condiciones normales de carga se tendrán en cuenta los efectos de las superficies libres.

2) Los brazos escorantes lw_1 y lw_2 provocados por el viento, a que se hace referencia, son valores constantes a todos los ángulos de inclinación y se calcularán del modo siguiente:

$$lw_1 = \frac{P \cdot A \cdot Z}{\Delta} \quad (\text{m})$$

y

$$lw_2 = 1,5 lw_1 \quad (\text{m})$$

donde:

$$P = 0,0514 \text{ (t,m}^2\text{)}$$

A = Área lateral proyectada de la parte del buque y de la cubierta que queden por encima de la flotación (m^2).

Z = Distancia vertical del centro A al centro del área lateral de la obra viva o aproximadamente hasta un punto correspondiente a una mitad del calado (m).

Δ = Desplazamiento (t).

3) El ángulo de balance (θ)¹ a que se hace referencia se calculará del modo siguiente:

$$\theta_1 = 109 \cdot k \cdot X_1 \cdot X_2 \sqrt{r \cdot s} \quad (\text{grados})$$

donde:

X_1 = Factor indicado en el cuadro 1.

X_2 = Factor indicado en el cuadro 2.

k = Factor que corresponde a lo siguiente:

¹ Respecto de los buques dotados de dispositivos antibalance, el ángulo de balance se determinará sin tomar en consideración el funcionamiento de estos dispositivos.

$k = 1,0$ respecto de un buque de pantoque redondo que no tenga quilla de balance ni quilla de barra;

$k = 0,7$ respecto de un buque de pantoque pronunciado;

$k =$ Como se indica en el cuadro 3 respecto de un buque con quilla de balance, quilla de barra o ambas.

$$r = 0,73 \pm 0,6 \text{ OG}/d$$

con:

OG = Distancia entre el centro de gravedad y la flotación (m) (+ si el centro de gravedad queda por encima de la flotación, - si queda por debajo).

$d =$ Calado medio de trazado del buque (m).

$s =$ Factor indicado en el cuadro 4.

Cuadro 1		Cuadro 2		Cuadro 3		Cuadro 4	
Valores del factor X_1		Valores del factor X_2		Valores del factor k		Valores del factor s	
B/d	X_1	C_B	X_2	$\frac{A_r \cdot 100}{L.B}$	k	T	s
$\leq 2,4$	1,0	$\leq 0,45$	0,75	0	1,0	≤ 6	0,100
2,5	0,98	0,50	0,82	1,0	0,98	7	0,098
2,6	0,96	0,55	0,89	1,5	0,95	8	0,093
2,7	0,95	0,60	0,95	2,0	0,88	12	0,065
2,8	0,93	0,65	0,97	2,5	0,79	14	0,053
2,9	0,91	$\geq 0,70$	1,0	3,0	0,74	16	0,044
3,0	0,90			3,5	0,72	18	0,038
3,1	0,88			$\geq 4,0$	0,70	≥ 20	0,035
3,2	0,86						
3,3	0,84						
3,4	0,82						
$\geq 3,5$	0,80						

(Los valores intermedios en los cuadros 1-4 se obtendrán por interpolación lineal).

Período de balance:

$$T = \frac{2 C \cdot B}{\sqrt{GM}} \quad (\text{segundos})$$

donde:

$$C = 0,373 + 0,023 (B/d) - 0,043 (L/100)$$

Los símbolos que aparecen en los cuadros anteriores y en la fórmula para el período de balance son los siguientes:

L = Eslora de flotación del buque (m).

B = Manga de trazado del buque (m).

d = Calado medio de trazado del buque (m).

C_B = Coeficiente de bloque.

A_k = Área total de las quillas de balance o área de la proyección lateral de la quilla de llanta, o suma de estas áreas (m²).

GM = Altura metacéntrica corregida por el efecto de las superficies libres (m).

IV.8.- Estabilidad después de averías y compartimentado.

Todos los buques de pasaje de más de 150 pasajeros deberán cumplir con los requisitos que al respecto se recogen en el Convenio Internacional de Sevimar vigente.

PONTONES

(Circular núm. 8/92: Prescripciones sobre Estabilidad sin Averías Aplicables a los Pontones).

I. CONSIDERACIONES GENERALES.

• • •

En general se considerará pontón, aquella embarcación que cumpla las siguientes características:

1. No es autopropulsada.

2. No lleva tripulación.
3. Transporta sólo carga en cubierta.
4. Tiene un coeficiente de bloque igual o superior a 0,9.
5. Su relación manga/puntal es superior a 3,00.
6. No tiene escotillas en cubierta, salvo pequeños registros cerrados por tapas y puntas.

II. PRUEBA DE ESTABILIDAD.

Normalmente no es necesario someter a un pontón a la prueba de estabilidad, siempre que en los cálculos se tome un valor moderado de la altura del centro de gravedad (KG) con el buque en rosca. La altura KG puede suponerse hasta el nivel de la cubierta principal, si bien se reconoce que cabe aceptar un valor inferior si éste va completamente documentado. El desplazamiento en rosca y la posición longitudinal del centro de gravedad se determinará mediante cálculos basados en lecturas de calado y densidad.

III. LIBRO DE ESTABILIDAD.

III.1. Generalidades.

La línea base a utilizar en los cálculos será la horizontal que pasa por el punto de intersección del canto bajo de la quilla y la perpendicular media (o sea la perpendicular en el punto medio de la eslora L definida en el punto 1.).

III.3. Planos y esquemas generales.

Se incluirán los siguientes planos y esquemas que, cuando el asiento en alguna de las condiciones de carga estudiadas difiera del de proyecto en más de 0,02 L, se deberán completar con planos o tablas de curvas hidrostáticas y de estabilidad de formas para asientos más próximos a los de las condiciones de carga estudiadas.

III.4. Cálculos de estabilidad.

Se incluirán los siguientes cálculos:

1. Informe sobre las lecturas de calado y densidad y cálculo del desplazamiento en rosca y la posición longitudinal del centro de gravedad.
2. Justificación de la supuesta posición vertical del centro de gravedad; si no se ha efectuado su determinación mediante la correspondiente prueba de estabilidad.
3. Cálculos que demuestren el cumplimiento de los criterios de estabilidad sin avería.
4. Orientación simplificada sobre estabilidad, como un diagrama de carga, que permita cargar el pontón de conformidad con los criterios de estabilidad.

III.5. Consideraciones a tener en cuenta en la realización de los cálculos.

1. No se tendrá en cuenta la flotabilidad de la cubertada (salvo que se haya autorizado una concesión por flotabilidad en el caso de cubertadas de madera firmemente sujetas).
2. Se tendrán en cuenta factores como la absorción de agua (por ejemplo, de la madera), el agua retenida en la carga (por ejemplo, en tuberías) y la formación de hielo.
3. Al realizar los cálculos de la escora producida por el viento:
 - 3.1. Se supondrá que la presión del viento es constante y, para operaciones de índole general, que actúa sobre una masa sólida que se extiende a lo largo de la cubierta de carga y hasta una altura supuesta por encima de dicha cubierta,
 - 3.2. se supondrá que el centro de gravedad de la carga está situado en el punto medio de la altura de ésta, y
 - 3.3. el brazo de palanca debido al viento se tomará desde el centro de la cubertada hasta el punto medio de calado.
4. Los cálculos se realizarán de modo que se abarque la gama completa de calados operaciones.
5. Se supondrá que el ángulo de inundación es aquél que da lugar a que se sumerja una abertura por la que pueda producirse inundación progresiva. En estas aberturas no se incluyen las que van cerradas con una tapa de registro estanca ni los respiraderos provistos de cierre automático.

IV. CRITERIOS DE ESTABILIDAD.

Se verificará en cada condición de carga que se cumplen los siguientes criterios:

- IV.1. El área bajo la curva de brazos adrizantes hasta el ángulo correspondiente al brazo adrizante máximo no será inferior a 0,08 m.rad.
- IV.2. El ángulo de escora estática ocasionado por una carga uniformemente distribuida producida por un viento de 0,54 kPa (0,055 t/m²/velocidad del viento de 30 m/s) no excederá el ángulo al que se sumerja la mitad del francobordo en la condición de carga pertinente, donde el brazo de palanca del momento escorante producido por el viento se mide desde el centro de la superficie expuesta al viento hasta el punto medio del calado.
- IV.3. La gama mínima de estabilidad será de:

$$20^\circ \text{ si } L \leq 100 \text{ m.};$$

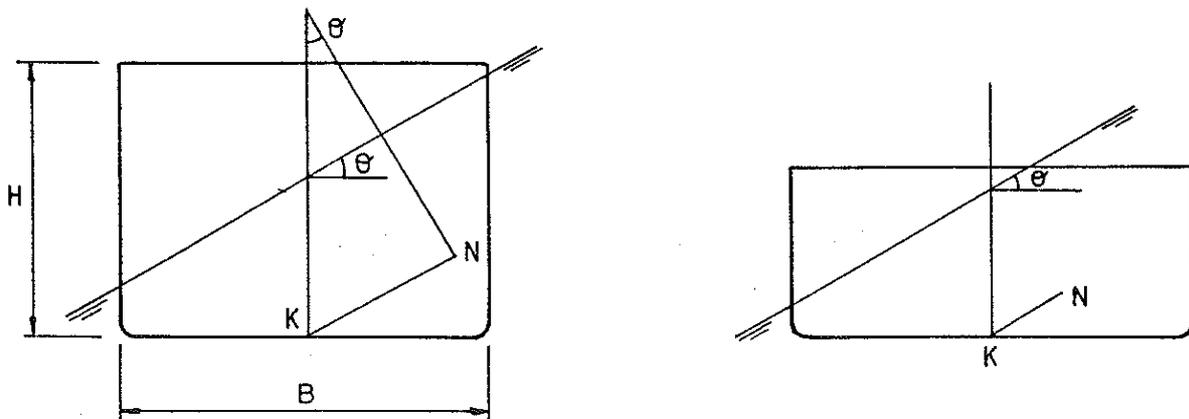
15° si $L \geq 150$ m.;

para esloras intermedias se calculará por interpolación.

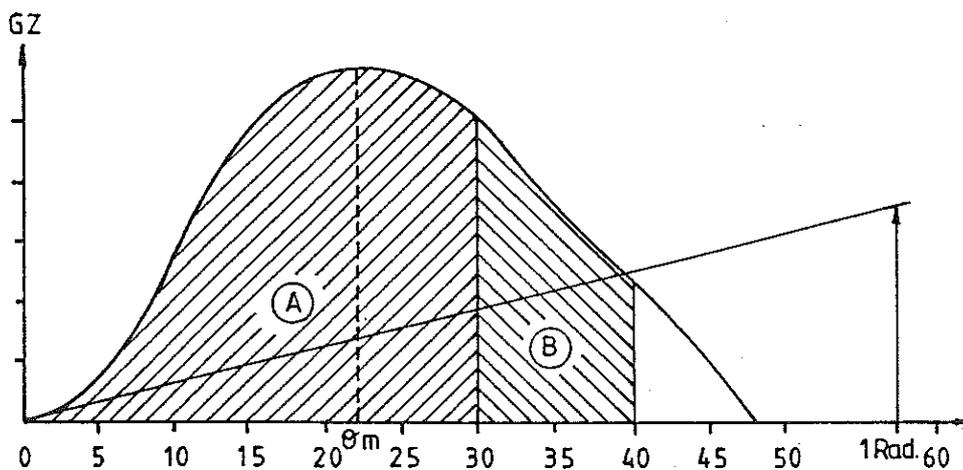
BUQUES AUXILIARES DE SUMINISTRO A LAS PLATAFORMAS DE PERFORACIÓN EN ALTA MAR (SUPPLY VESSELS)

(B.O.E. núm. 91 de 16-04-79 y corrección de errores en el B.O.E. núm. 138 de 09-06-79).

Este tipo de buques se caracteriza por tener una relación manga/puntal bastante alta, por lo que los valores de KN disminuyen a partir de un cierto ángulo de escora en que empiezan a sumergir la cubierta.



Esta disminución de los valores de KN puede hacer que la curva de brazos adrizantes, GZ, tome una forma típica, con brazos adrizantes altos para escoras inferiores a 30°, pero que después caen rápidamente, y en consecuencia no cumpla el criterio de estabilidad convencional.



Por ello la O.M.I. ha propuesto el siguiente criterio alternativo:

- a) Si el par adrizante máximo corresponde a $\theta_m = 15^\circ$, el área A será como mínimo de 0,070 m. rad.
- b) Si el par adrizante máximo corresponde a $\theta_m = 30^\circ$, el área A será como mínimo de 0,055 m. rad.
- c) Si el ángulo θ_m correspondiente al par adrizante máximo está comprendido entre 15° y 30° , el valor del área A se obtiene por interpolación:

$$\frac{A - 0,055}{0,070 - 0,055} = \frac{30 - \theta_m}{30 - 15}$$

o sea:

$$A = 0,055 + 0,001 \times (30 - \theta_m)$$

A efectos prácticos esta fórmula podría expresarse también como,

$$A = \frac{85 - \theta_m^2}{1.000}$$

aunque las cifras indican cantidades no homogéneas.

Por todo lo cual, el criterio alternativo para este tipo de buques se expresa del modo siguiente:

- 1.a) El área A, para $\theta_m = 15^\circ$, será como mínimo de 0,070 m. rad.
- b) El área A, para $\theta_m = 30^\circ$, será como mínimo 0,055 m. rad.
- c) El área A, para valores de θ_m comprendidos entre $\theta = 15^\circ$ y $\theta = 30^\circ$, será como mínimo

$$A = 0,055 + 0,001 \times (30 - \theta_m)$$

- d) El área B será como mínimo de 0,030 m. rad.
2. El valor de GZ_{30° será como mínimo de 0,20 m.
3. El valor de GZ máximo se cumplirá para $\theta > 15^\circ$.
4. El valor de GM_0 será como mínimo de 0,15 m.

Nota.- En el B.O.E. núm. 91 de 16-04-79 aparece una errata en la expresión $A = 0,055 - 0,001 \times (30 - \theta_m)$, es decir, con signo "-", cuando debería ser "+". Este error no fue corregido en el B.O.E. núm. 138 de 09-06-79.

EXPERIENCIA DE ESTABILIDAD SEGÚN LA ADMINISTRACIÓN

El **objetivo** que se pretende con esta experiencia es saber con cierta exactitud el desplazamiento y la posición del centro de gravedad (\overline{KG} y X_G) del buque en la **condición de rosca**.

El conocimiento de estos datos es muy importante, pues como es sabido, el desplazamiento en rosca constituye de alguna manera el peso propio del barco, y lo va a acompañar a lo largo de toda su vida útil. Por otro lado, estos valores son el punto de partida para estimar los desplazamientos y las posiciones del centro de gravedad en las distintas condiciones de navegación o situaciones de carga (como combinación del peso muerto y rosca), y así comprobar que va a cumplir los criterios de estabilidad que le sean exigibles.

Evidentemente, cada vez que se modifique o altere cualquier peso que afecte a la condición de rosca habrá que repetir la experiencia de estabilidad. Incluso para los buques de pasaje hay una circular de la Inspección General de Buques en la que se dice que¹ *la Enmienda al Convenio SOLAS, 74, contenida en la Resolución de la OMI, MSC 12 (56), en la que se añade un párrafo 3, a la Regla 22 del Capítulo II-1 en el que se prescribe que en todos los buques de pasaje se llevará a cabo, a intervalos que no excedan de cinco años, un reconocimiento para determinar el peso en rosca y la posición longitudinal del centro de gravedad. Si, al comparar los resultados con la información aprobada sobre estabilidad, se encontrará, o se previera, una variación del desplazamiento en rosca que exceda del 2%, o una variación de la posición longitudinal del centro de gravedad que exceda del 1% de L, se someterá el buque a una nueva prueba de estabilidad.*

Para conseguir este objetivo, el punto de partida es el buque en la **condición de la experiencia**, es decir, el buque en el estado en el que se encuentra en el momento de realizarle la prueba, que, aunque sea muy próxima, será distinta de la condición de rosca.

Para realizar la experiencia propiamente dicha, habitualmente, el procedimiento operativo consiste en colocar dos pesos conocidos e iguales, uno en cada banda. En primer lugar se mueve uno de los pesos hacia su banda contraria, tomándose las lecturas de los péndulos; posteriormente se repite el proceso con el otro peso. Estas operaciones se realizan varias veces para obtener una estadística.

El cálculo de los valores de $\overline{G_0M}$ y \overline{GM} se realiza como ya hemos comentado al hablar de la experiencia de estabilidad corriente. Sin embargo, y para ganar en

¹ De aquí en adelante todo lo que vaya escrito en cursiva es una transcripción literal de los distintos textos.

precisión, la Administración exige que se tenga en cuenta el trimado del buque durante la experiencia. Para ello considera dos posibilidades:

- A.- Trimado grande (apartado III.3.A. de las respectivas circulares). En este caso, el desplazamiento, la abscisa y la ordenada del centro de carena, correspondientes a esa flotación del buque durante la experiencia, hay que obtenerlos por cálculo directo a partir de las curvas de Bonjean y del plano de formas.
- B.- Trimado pequeño (apartado III.3.B.). En esta situación, para el desplazamiento y las dos coordenadas del centro de carena se admiten los valores obtenidos de las curvas hidrostáticas, entrando con el calado medio que tuviese el buque en el momento de la prueba. Si bien, al desplazamiento y a la ordenada del centro de carena hay que hacerles unas pequeñas correcciones por trimado. En el caso de la ordenada del centro de carena (KB , o KC según las circulares), esta corrección es en función del radio metacéntrico longitudinal, el cual hay que obtener por cálculo directo.

En ambos casos, el radio metacéntrico transversal siempre hay que obtenerlo por cálculo directo a partir del plano de formas.

Posteriormente, y una vez obtenidos todos estos datos (\overline{GM} , Δ , \overline{KB} , X_G , etc.), el siguiente paso es determinar las coordenadas del centro de gravedad del buque durante la experiencia, para lo cual también hay que volver a considerar el trimado: En el caso A, la posición del centro de gravedad se obtiene a partir del radio metacéntrico transversal, y en el caso B, del longitudinal.

El protocolo de la experiencia y los cálculos a realizar se recogen siempre en el apartado III. EXPERIENCIA DE ESTABILIDAD de las distintas circulares sobre estabilidad correspondientes a cada tipo de buque, y dice así:

III.- EXPERIENCIA DE ESTABILIDAD

III.1.- Datos de la experiencia

Se indicarán en el orden siguiente:

- *Calados en las marcas de proa y popa al canto bajo de la quilla.*
- *Enumeración de los pesos (y sus centros de gravedad) que se encuentren a bordo en el momento de la experiencia y que sean ajenos al desplazamiento en rosca del buque.*
- *Enumeración de los pesos (y sus centros de gravedad) que no estén situados en el buque en el momento de la experiencia y que formen parte del desplazamiento en rosca del buque.*

- Enumeración de los pesos (y sus centros de gravedad) que estén situados en un lugar distinto del que les corresponde en el desplazamiento en rosca del buque.
- Pesos utilizados para la experiencia y su posición en el buque.
- Distancia de traslado de los pesos.
- Posición de los péndulos y su longitud.
- Desviación de los péndulos, indicándose expresamente que la mencionada desviación corresponde al momento total = peso situado en una banda (mitad del peso total) por la distancia total de traslado entre ambas bandas.

III.2.- Cálculos a incluir

Se incluirán los siguientes cálculos, y en el orden que se indica:

- Momento escorante (peso que se traslada en cada caso por la distancia).
- Desviación media de los péndulos.
- Calados sobre la base en las perpendiculares de proa y popa.
- Asiento del buque en la experiencia.
- Desplazamiento. Se efectuará conforme a lo indicado en III.3.
- Altura metacéntrica transversal sin corregir por superficies libres (la obtenida directamente por el traslado de los pesos, es decir, lo que nosotros hemos llamado $\overline{G_oM}$).
- Corrección por superficies libres de tanques. Se efectuará conforme a lo indicado en el apartado IV.4 para la corrección del GM inicial².
- Altura metacéntrica transversal corregida por superficies libres (a saber: $\overline{GM} = \overline{G_oM} + \overline{GG_o}$).
- Radio metacéntrico longitudinal. Sólo necesario en el caso contemplado en el apartado III.3.B, (trimado pequeño) en cuyo caso se determinará por cálculo directo.

² Corrección del GM : $\overline{GG_o} = \frac{\Sigma i \cdot \gamma}{\Delta}$

- Posición del centro de carena (ordenada sobre la base y abscisa desde la perpendicular de popa). Se efectuará conforme a lo indicado en el apartado III.3.
- Radio metacéntrico transversal. Se efectuará por cálculo directo.
- Ordenada del metacentro transversal sobre la base.
- Ordenada del centro de gravedad del buque en la experiencia sobre la base.
- Abscisa del centro de gravedad del buque en la experiencia desde la perpendicular de popa. Se efectuará conforme a lo que se indica en el apartado III.3.
- Desplazamiento, ordenada sobre la base del centro de gravedad y abscisa desde la perpendicular de popa del centro de gravedad del buque en rosca.

III.3.- Consideraciones a tener en cuenta

La realización de los cálculos se atenderá a una de las alternativas siguientes:

A.- Si el asiento en la experiencia difiere del asiento de proyecto en más de $0,03 \times L_{pp}$ o en más de 1 metro.

A.1.- Desplazamiento, ordenada y abscisa del centro de carena.- Se obtendrán por cálculo directo.

A.2.- Abscisa del centro de gravedad desde la perpendicular de popa.- Lógicamente, al conocerse la posición del centro de carena real, bastará corregir ésta por el asiento.

B.- En los restantes casos:

B.1.- Desplazamiento:

$$\Delta = \Delta_1 \pm X_F \times \text{tg } \theta \times (Tm \times cm)$$

en donde:

Δ_1 = Desplazamiento obtenido de las curvas hidrostáticas en función del calado medio.

X_F = c.d.g. de la flotación obtenida en las curvas hidrostáticas en función del calado medio, con relación a \otimes (expresado en cm).

$\text{tg } \theta$ = Diferencia entre el asiento real y el de proyecto.

$Tm \times cm =$ Toneladas por cm. de inmersión obtenido en las curvas hidrostáticas en función del calado medio.

Según la notación que empleamos en el curso, la expresión anterior sería:

$$\Delta = \Delta_1 \pm \overline{\otimes F} \times tg \varphi \times TCI$$

B.2.- Radio metacéntrico longitudinal (R). Se obtendrá por cálculo directo.

B.3.- Ordenada del centro de carena.

$$KC = KC_1 + 1/2 R (tg \theta)^2$$

$KC_1 =$ ordenada del centro de carena obtenida de las curvas hidrostáticas, en función de Δ .

Según nuestra notación sería:

$$\overline{KB} = \overline{KB_1} + \frac{1}{2} \times \overline{BM_1} \times tg^2 \varphi$$

B.4.- Abscisa del centro de carena (X_C).- Se obtendrá directamente de las curvas hidrostáticas en función de Δ .

B.5.- Abscisa del centro de gravedad desde la perpendicular de popa³.

$$X_G = X_C \pm (R - a) tg \theta$$

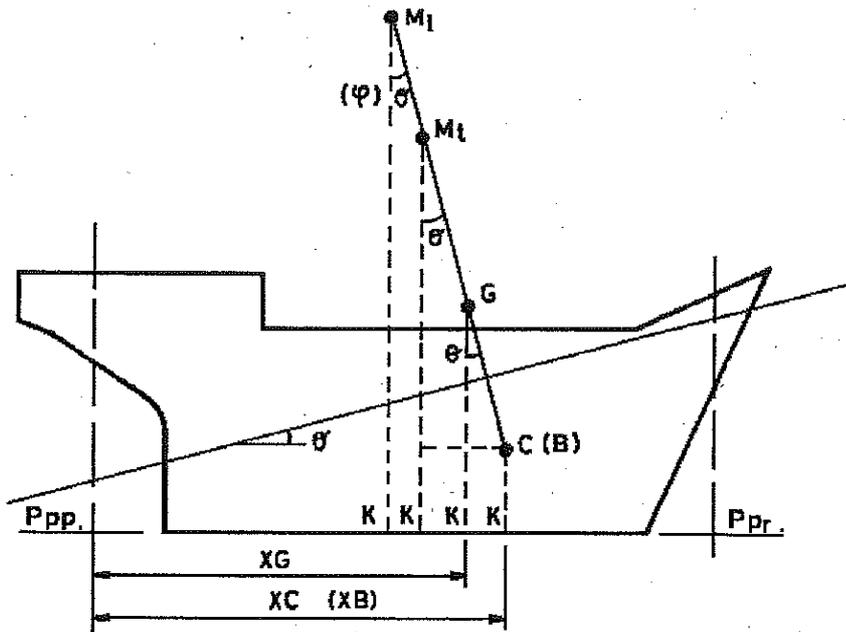
En nuestros términos:

$$X_G = X_B \pm (\overline{BM_1} - \overline{GM_1}) \times tg \varphi$$

En los cálculos directos, cuando se trate de buques de madera, las semimangas se tomarán fuera de forros.

Para comprender todo lo dicho anteriormente, sobre cómo se obtienen las coordenadas del centro de gravedad del buque en el momento de la experiencia, debemos tener en cuenta que al estar el buque en equilibrio, el metacentro longitudinal (M_l), el metacentro transversal (M_t), el centro de gravedad (G) y el centro de carena (C , o B) están alineados sobre una recta perpendicular a la flotación y que pasa por C .

³ a es la altura metacéntrica longitudinal.



Así en el caso A, trimado grande, tendremos:

$$\overline{KG} = \overline{KC} + (\overline{CM_t} - \overline{GM_t}) \times \cos \theta$$

que según nuestra notación sería:

$$\overline{KG} = \overline{KB} + (\overline{BM_t} - \overline{GM_t}) \times \cos \varphi$$

Y si, como en el caso del dibujo, el trimado es por proa

$$X_G = X_C - (\overline{CM_t} - \overline{GM_t}) \times \text{sen } \theta$$

es decir,

$$X_G = X_B - (\overline{BM_t} - \overline{GM_t}) \times \text{sen } \varphi$$

Mientras que si el trimado es por popa

$$X_G = X_C + (\overline{CM_t} - \overline{GM_t}) \times \text{sen } \theta$$

o sea,

$$X_G = X_B + (\overline{BM}_t - \overline{GM}_t) \times \text{sen } \varphi$$

En el caso B, trimado pequeño, las fórmulas para obtener las coordenadas del centro de gravedad son las que se han dado anteriormente al transcribir las circulares.

Una vez ya obtenidos el desplazamiento y las dos coordenadas del centro de gravedad que tenía el buque en el momento de realizar la experiencia, llamémosles, por ejemplo, Δ_e , \overline{KG}_e y X_{Ge} ; el paso final consiste en determinar estos valores para el buque en la condición de rosca (Δ_R , \overline{KG}_R y X_{GR}). Para ello deberemos tener en cuenta:

- a) Todos los **pesos que faltasen** en el momento de la experiencia, pero que formen parte de la condición de rosca, por ejemplo, algún motor o algún equipo que en ese momento no estuviera a bordo, etc., (pesos positivos).
- b) Los **pesos ajenos** que estuviesen a bordo en ese momento, pero que no formen parte de la condición de rosca, como por ejemplo, personal, lastres, los propios pesos utilizados para realizar la experiencia, etc. (pesos negativos).
- c) Los **pesos descolocados** o fuera de su lugar, que aunque no influyen en el total para obtener el desplazamiento en rosca, puesto que ya estaban a bordo, sí que lo hacen en las coordenadas de su centro de gravedad.

Para considerar estos pesos descolocados podemos seguir dos caminos:

- O bien tratarlos como pesos ajenos en la posición que ocupan, y a la vez como pesos que faltan en su posición correcta.

$$\Delta_R = \Delta_e - \sum \text{pesos ajenos} + \sum \text{pesos faltan} - \sum \text{pesos descolocados en su situación actual} + \sum \text{pesos descolocados en su situación definitiva.}$$

Análogamente obtendríamos las ecuaciones de los momentos con respecto al plano base (K) y con respecto a la perpendicular de popa (o la sección media \otimes).

- O bien aplicar el momento de transferencia desde las posiciones que tenía el centro de gravedad de cada uno de los pesos descolocados, hasta las que debería ocupar. Ahora bien, en este caso, a su vez tenemos también dos alternativas: podemos aplicar el momento de transferencia al buque en la condición de la experiencia o al buque en rosca.
 - Al buque en la experiencia.

Una vez obtenidos Δ_e , \overline{KG}_e y X_{Ge} , como queda dicho, sería el paso inmediato siguiente. Si llamamos D_V y D_H a las variaciones vertical (de \overline{KG}_e) y horizontal (de X_{Ge}), respectivamente, del centro de gravedad del buque, que se van a producir como consecuencia del traslado, una distancia vertical d_v y una distancia horizontal d_h , del centro de gravedad de cada uno de los pesos descolocados, nos quedaría:

$$D_V = \frac{\sum P_{desc.} \times d_v}{\Delta_e} \quad \text{y} \quad D_H = \frac{\sum P_{desc.} \times d_h}{\Delta_e}$$

Con estos valores de D_V y D_H , las nuevas coordenadas del centro de gravedad, \overline{KG}'_e y X'_{Ge} , serían:

$$\overline{KG}'_e = \overline{KG}_e + D_V \quad \text{y} \quad X'_{Ge} = X_{Ge} + D_H$$

Ahora ya, a partir de los valores de Δ_e , \overline{KG}'_e y X'_{Ge} , podemos obtener el desplazamiento en rosca

$$\Delta_R = \Delta_e - \sum P_{ajenos} + \sum P_{faltan}$$

Y tomando momentos respecto al plano base K

$$\Delta_R \times \overline{KG}_R = \Delta_e \times \overline{KG}'_e - \sum P_{ajenos} \times \overline{Kg} + \sum P_{faltan} \times \overline{Kg}$$

obtendríamos \overline{KG}_R . Y de forma análoga, tomando momentos respecto a la perpendicular de popa, obtendríamos X_{GR} .

- Al buque en la condición de rosca.

Partiendo de los valores previos de Δ_e , \overline{KG}_e y X_{Ge} , obtendríamos en primer lugar el desplazamiento en rosca

$$\Delta_R = \Delta_e - \sum P_{ajenos} + \sum P_{faltan}$$

Y tomando momentos obtendríamos unas coordenadas intermedias, \overline{KG}'_R y X'_{GR} , del centro de gravedad en rosca

$$\left. \begin{aligned} \Delta_R \times \overline{KG}'_R &= \Delta_e \times \overline{KG}_e - \sum P_{ajenos} \times \overline{Kg} + \sum P_{faltan} \times \overline{Kg} \\ \Delta_R \times X'_{GR} &= \Delta_e \times X_{Ge} - \sum P_{ajenos} \times X_g + \sum P_{faltan} \times X_g \end{aligned} \right\}$$

A partir de los valores de Δ_R , \overline{KG}'_R y X'_{GR} así obtenidos, ya podemos aplicar el momento de transferencia a los pesos descolocados, como en el caso anterior, para obtener \overline{KG}_R y X_{GR}

$$\left. \begin{aligned} D_V &= \frac{\sum p_{desc.} \times d_v}{\Delta_R} \\ D_H &= \frac{\sum p_{desc.} \times d_h}{\Delta_R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \overline{KG}_R &= \overline{KG}'_R + D_V \\ X_{GR} &= X'_{GR} + D_H \end{aligned} \right\}$$

Obviamente debemos ser muy cuidadosos y no confundir ambas alternativas, pues al ser $\Delta_R \neq \Delta_e$, los valores de D_V y D_H obtenidos en ambos casos serán totalmente distintos.

Todos estos datos y cálculos se registran en un documento oficial que es el **Acta de la Experiencia de Estabilidad**, de la cual hay que incluir una copia en el **Libro de Estabilidad**, (libro en el que además se registran todos los cálculos que demuestran que el buque cumple el criterio de estabilidad que le sea exigible en las distintas condiciones de carga, así como las instrucciones al capitán).

A este respecto, en las distintas circulares sobre estabilidad de buques, en el apartado I.1, se dice:

I.1.- Acta de Estabilidad.

En el Acta se recogerán, además de los datos que explícitamente se indican en el impreso oficial, los siguientes extremos:

- *Peso y situación del centro de gravedad del lastre fijo que, en su caso, pueda haberse colocado en el buque. Se hará constar la prohibición expresa de modificar este lastre fijo sin autorización previa del Inspector de Buques.*
- *Enumeración detallada de los pesos existentes a bordo del buque en el momento de efectuar la experiencia de estabilidad y que posteriormente se han de disminuir por no pertenecer al desplazamiento del buque en rosca.*

Análogamente se indicarán los pesos que falten en dicho momento para completar el desplazamiento en rosca.

- *Nota indicativa, en su caso, de la exención de la experiencia de estabilidad, mencionando explícitamente la fecha del escrito correspondiente de la Inspección General.*
- *Nota desautorizando la navegación del buque en zonas de formación de hielos si no se ha incluido el estudio de esta situación en el Libro de Estabilidad.*
- *Nota desautorizando la navegación del buque con carga en cubierta si no se ha incluido el estudio de esta situación en el Libro de Estabilidad.*

Por último hay que resaltar, que la Inspección, haciendo hincapié en que el objetivo final de esta prueba es la determinación de la condición de rosca, exige que las pruebas de estabilidad se realicen, *en principio, de forma que el desplazamiento del buque en la experiencia no supere en más de un 15% al desplazamiento correspondiente al buque en rosca, recomendándose, además, que no supere el valor del 5%. Cuando no sea posible no rebasar el valor del 15% o cuando las formas del buque aconsejen lastrar un mayor número de tanques para lograr un trimado aceptable, se consultará por esa Inspección a esta Inspección General si se admite la realización de la experiencia en esas condiciones, aduciéndose los motivos justificativos para ello. Además tampoco admite, en principio, experiencias de estabilidad en las que el peso de los elementos del buque en rosca que faltan por colocar a bordo sea superior al 5% del desplazamiento del buque en rosca.*

Debemos tener en cuenta que la condición de rosca no es una condición "natural" de navegación, por lo que pudiera ocurrir que en esa situación el buque no fuese estable, o tuviese un trimado excesivo, y hubiese que lastrar. Sin embargo, aunque las Normas de aplicación del **Convenio Internacional para la Seguridad de la Vida Humana en el Mar** de 1.974, admiten la posibilidad de *llenar por completo uno o más tanques de lastre con el fin de mejorar el trimado del buque para realizar la experiencia en mejores condiciones*, la Inspección lo interpreta como *posibilidad de llenar por completo, únicamente, el número mínimo de tanques para que el trimado del buque en la experiencia no sea excesivo desde el punto de vista de la variación que el trimado pueda producir en la magnitud y distribución del volumen de carena según las formas del buque. Salvo casos especiales, dicho número mínimo de tanques no suele ser superior a tres tanques (o parejas de tanques) de lastre.*

MOVIMIENTOS DE BALANCE. VALORES DE LA ALTURA METACÉNTRICA

1.- MOVIMIENTOS DE BALANCE

El buque, como flotador libre, tiene una forma propia y característica de oscilación. Si un cuerpo está en un medio homogéneo, por ejemplo el aire, su eje de oscilación pasa por su centro de gravedad. En el caso de un buque de superficie, que está parcialmente en el agua y parcialmente en el aire, su eje es variable, no pasando exactamente por el centro de gravedad. Experimentalmente se ha observado que para movimientos de balance este eje normalmente está situado entre el centro de gravedad y la flotación. No obstante, no se cometen grandes errores si se supone que pasa por el centro de gravedad.

El periodo del balance propio de un buque, para pequeñas oscilaciones y en aguas tranquilas, vendría dado por la fórmula teórica:

$$T = \frac{2 \pi \cdot K}{\sqrt{g \cdot GM}}$$

donde K es el radio de inercia másico del buque para oscilaciones transversales.

Si trabajamos en el sistema métrico y tomamos $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$$T = \frac{2,006 \cdot K}{\sqrt{GM}}$$

Sin embargo, lo usual es expresar el radio de inercia K en función de la manga, con lo que la fórmula práctica que se utiliza es:

$$T = \frac{f \cdot B}{\sqrt{GM}}$$

siendo f un coeficiente numérico que se obtiene experimentalmente midiendo el periodo de balance, conociendo previamente el valor de GM . Sus valores dependen de:

- El tipo de buque.
- Su disposición general.
- Su estado de carga.

Quando no se disponga de estos datos, se puede tomar un valor promedio de $f = 0,78$.

El periodo de balance, y por tanto los valores del coeficiente f , aumenta cuando el buque tiene una distribución con los pesos muy alejados de su centro de gravedad, como grandes espacios vacíos, lastres en el doble fondo, grandes superestructuras o pesos altos. Por el contrario, disminuye en buques afinados, con los pesos concentrados cerca del centro de gravedad y pocas superestructuras.

En cualquier caso, hay que tener presente que esta fórmula sólo es válida para pequeñas oscilaciones y en aguas tranquilas, pues no tiene en cuenta las resistencias pasivas entre el buque y el agua arrastrada. Para ángulos de inclinación no comprendidos en la zona de estabilidad inicial puede haber una diferencia sensible entre el periodo de balance real y el obtenido por la fórmula.

1.1. Aplicación

Una aplicación de gran interés de esta fórmula es la comprobación práctica de la altura metacéntrica en la mar. Para ello se determina la media aritmética del valor de T aprovechando varios balances **naturales** consecutivos del buque, lo más regulares posibles, que no sean de una amplitud excesiva, por ejemplo con ángulos de escora inferiores a 10 grados. Entonces,

$$\overline{G_oM} = \left(\frac{f.B}{T} \right)^2$$

Conviene tener muy presente que para aplicar correctamente esta expresión, el periodo de balance, que se mide con un cronómetro en segundos, es el tiempo correspondiente a una oscilación completa, es decir, si por ejemplo empezamos a contar el tiempo cuando el ángulo de escora en el balance es cero (crujía), el balance completo sería: crujía - estribor - crujía - babor - crujía, o viceversa, ya que existe una tendencia natural errónea a contar solamente medio balance.

Este procedimiento puede dar un valor de \overline{GM} con un error inferior al 10% en la mayor parte de los casos. Por otro lado, la altura metacéntrica que obtenemos es la disponible, $\overline{G_oM}$, aunque a efectos prácticos, como esto se aplica a buques pequeños, el efecto de las superficies libres puede ser asumido perfectamente dentro del margen de imprecisión del método.

En España, según la **Orden del Ministerio de Comercio de 29 de julio de 1970 (B.O.E. núm. 197, de 18 de agosto de 1970)**, sobre **normas de estabilidad de buques de carga y pasaje menores de 100 metros de eslora**, en su Apéndice III, *determinación aproximada de la estabilidad del buque por medio de la medición del periodo de balance (para buques hasta 70 metros de eslora)*, considera conveniente utilizar este método como información complementaria a suministrar a los capitanes de los buques para determinar de una manera sencilla la estabilidad inicial. (El texto integro de este Apéndice, donde se indica el procedimiento a seguir para su utilización práctica, se transcribe al final). Asimismo este ensayo también aparece prácticamente idéntico en la **Orden del Ministerio de Comercio de 29 de**

julio de 1970 (B.O.E. núm. 198, de 19 de agosto de 1970), sobre *normas de estabilidad de buques pesqueros*, en su Apéndice IV.

1.2. Consecuencias

- I. Como es sabido, si un buque tiene un movimiento alternativo, y por tanto con velocidades variables, es porque sobre él actúan una serie de aceleraciones, que serán máximas cuando la velocidad sea cero (ángulo máximo de escora alcanzado a cada banda), y mínimas o nulas cuando la velocidad sea máxima (ángulo de escora cero). Estas aceleraciones tienen una relación inversa con el periodo T , de tal manera que si éste, es decir, el tiempo que tarda el buque en completar todo el recorrido de una oscilación, es muy corto, es porque las aceleraciones son mucho más grandes que si el periodo fuese mayor.

Según esto, si observamos la fórmula anterior del \overline{GM} vemos que si la altura metacéntrica tiene un valor muy elevado, lo que podría parecer muy conveniente desde el punto de vista de la estabilidad del buque, tendríamos un periodo de balance muy corto, lo que originaría fuertes aceleraciones con grandes fuerzas de inercia. Estas fuerzas resultan muy perjudiciales tanto para el propio buque (por ejemplo para los equipos electrónicos, las propias estructuras, piénsese en un buque de guerra como plataforma de tiro, etc.), como para las personas, que se verán más o menos afectadas por distintos grados de mareo.

Expresando las aceleraciones como una fracción de la aceleración de la gravedad, se halló que con aceleraciones del orden de $0,1 \times g$, los pasajeros empiezan a estar incómodos, y con aceleraciones de $0,2 \times g$ a $0,3 \times g$, el mareo es bastante probable.

Como orientación sobre los valores normales del periodo T puede tomarse la relación de Kempf

$$8 < T \sqrt{\frac{g}{B}} < 14$$

A la relación

$$C_K = T \sqrt{\frac{g}{B}}$$

se le conoce como coeficiente de Kempf, C_K . Valores de este coeficiente mayores de 14 conducen a buques de movimientos de balance lentos, y por tanto de escasa estabilidad inicial. Si C_K es inferior a 8, los movimientos de balance son muy bruscos, con aceleraciones que pueden llegar a ser incómodas para las personas.

Para obviar estos inconvenientes algunos buques suelen llevar diversos elementos estabilizadores, como las quillas de balance, que al aumentar la resistencia en el agua hacen que estos movimientos sean más lentos, incluso existen también dispositivos formados por unos tanques intercomunicados entre sí que crean unas superficies libres controladas.

Por otro lado, si el valor del periodo T es muy alto (lo que se suele llamar un buque "dormido" porque sus movimientos o reacciones son muy lentos) nos indica que su altura metacéntrica es muy baja, y por tanto al tener una estabilidad muy pequeña, su escasa reacción ante situaciones comprometidas puede ser un problema grave.

II. Además del estudio del periodo propio de oscilación en sí, también nos interesa conocer la interrelación entre éste y las posibles excitaciones externas.

Una de las principales causas que perturban la estabilidad del buque son las olas, cuyos efectos pueden llegar a ser muy peligrosos, pues, aparte un posible corrimiento de la carga, se nos pueden presentar dos situaciones genéricas:

- a) Con mar de través, al actuar las olas como un elemento natural de excitación periódica, puede aparecer un sincronismo o resonancia entre la frecuencia (inversa del periodo) propia de oscilación del buque y la de incidencia del tren de olas.

Como es sabido por la Mecánica, en ese caso el movimiento oscilatorio alcanzará su mayor amplitud, lo que podría provocar la zozobra del buque en un tiempo muy pequeño.

- b) Normalmente la estabilidad transversal del buque sólo se calcula para inclinaciones en aguas tranquilas (flotaciones planas). Cuando el buque se enfrenta a un tren de olas esta hipótesis ya no es válida, y la distribución de empujes es totalmente distinta.

Con el mar de popa, en esta circunstancia, la estabilidad puede quedar muy disminuida cuando el buque se encuentre en una posición de quebranto sobre una ola de longitud igual a su eslora. Esta situación se puede agravar aún más si la velocidad del buque es igual o muy próxima a la velocidad de propagación de las olas, pues en vez de estar en una situación comprometida de forma puntual, lo estaría de forma continua, aumentando así las posibilidades de un accidente catastrófico.

Según esto, la condición más desfavorable en la que puede encontrarse un buque es con mar de aleta, ya que podría darse el caso de que se sumasen los dos efectos de mar de través y mar de popa. Es un hecho conocido el que muchos barcos pequeños se han perdido con mal tiempo y mar de aleta cuando estaban corriendo el temporal.

En consecuencia, al proyectar un buque se deberían considerar las condiciones meteorológicas que suelen prevalecer en la zona donde ha de prestar sus servicios, y así, para evitar que el buque esté sometido a fuertes movimientos de balance, y sobre todo el sincronismo, sería conveniente conseguir que el periodo de balance propio del buque fuese superior a los valores usuales del periodo de las olas.

Sin embargo, para buques pequeños, esto conlleva a valores de \overline{GM} incompatibles con la seguridad del buque. Por lo tanto hay que aceptar en muchos casos valores de T iguales al periodo de ciertas olas, procurando que T tome el valor más elevado compatible con la seguridad del buque. En general puede decirse que cuanto mayor sea el francobordo efectivo, mayor será el periodo de balance compatible con la seguridad.

En buques grandes llegan a obtenerse valores de T lo suficientemente altos como para que muy rara vez puedan ser alcanzados por los valores del periodo de las olas, lo cual explica en parte que dichos buques sean los de mejor comportamiento en la mar.

2.- VALORES DE LA ALTURA METACÉNTRICA

Antiguamente era usual el considerar la estabilidad inicial de un buque como el único parámetro para juzgar sus condiciones de estabilidad. Hoy en día los criterios de estabilidad exigen un estudio pormenorizado de las curvas de estabilidad para las distintas condiciones de carga.

Los valores mínimos de la altura metacéntrica que exigen los diferentes criterios oficiales de estabilidad según los tipos de buques son:

Remolcadores	0,35 m
Carga y pasaje	0,15 m
Madereros	0,10 m
Pesqueros	0,35 m
Pontones	0,15 m

Conviene tener presente que estos criterios oficiales únicamente exigen valores mínimos para los distintos parámetros de estabilidad (no sólo de la altura metacéntrica). Sin embargo, por las razones ya expuestas, tampoco conviene que sean excesivos.

El Convenio Internacional de Seguridad de la Vida Humana en la Mar (SEVIMAR) da indicaciones sobre los valores de \overline{GM} después de averías. Así, si se produce una inundación simétrica el buque debe quedar con una altura metacéntrica mayor de 0,05 m; y si la inundación es asimétrica la escora final no debe exceder de 7 grados, excepto en algunos casos especiales que admite hasta 15 grados.

Los valores de la altura metacéntrica se suelen comparar con la manga (B). Así, por ejemplo, en buques de pasaje, que interesa un \overline{GM} pequeño por razones obvias de comodidad, el \overline{GM} puede ser menor del 1 % B en rosca. Para buques cargueros el \overline{GM} puede estar entre 1 - 2 % B al llegar a puerto, y 3 - 5 % B al comienzo del viaje, pudiendo en algunos casos llegar hasta el 7 % B .

A título meramente orientativo, algunos valores de \overline{GM} pueden ser:

Destruyores	0,61 - 0,91 m	"
Pasaje	0,61 - 1,22 m	"
Carga general	0,30 - 0,91 m	"
Remolcadores	0,38 - 0,46 m	"
Barcos de vela	0,76 - 1,07 m	"

B. O. del Estado núm. 197, de 18 de agosto de 1970.

MINISTERIO DE COMERCIO

Orden de 29 de julio de 1970 sobre normas de estabilidad de buques de carga y pasaje menores de 100 metros de eslora.

APÉNDICE III

Determinación aproximada de la estabilidad del buque por medio de la medición del periodo de balance

(Para buques hasta 70 metros de eslora)

PRINCIPIOS DEL MÉTODO

1. Se considera conveniente completar la información a suministrar a los Capitanes de buques pequeños, facilitándoles instrucciones para una determinación sencilla de la estabilidad inicial mediante la medida del periodo de balance del buque.

2. De las diversas fórmulas aproximadas que se han empleado para el cálculo de la altura metacéntrica inicial a partir del periodo de balance, la más conveniente, por dar los mejores resultados y ser la más sencilla, es:

$$GM_0 = \left[\frac{f \cdot B}{T_r} \right]^2$$

Donde:

f = factor numérico que depende del tipo, condición de carga y disposición general del buque.

B = manga del buque, expresada en la misma unidad que GM_0 .

T_r = periodo de balance del buque, en segundos, es decir, tiempo necesario para una oscilación completa (babor-estribor-babor o viceversa).

3. El factor « f » es de importancia máxima y se puede determinar experimentalmente midiendo el periodo de balance del buque considerado como promedio de varias oscilaciones de pequeña amplitud y teniendo en cuenta al mismo tiempo los valores de la manga del buque, B , y de su altura metacéntrica corregida, GM_0 . Al ser este valor de « f » variable con el reparto de la carga se recomienda que se determinen por lo menos los valores de « f » para el buque en lastre y a plena carga.

4. A continuación se indican algunos valores experimentados del coeficiente « f » en buques de tamaño normal (excepto petroleros).

- a) Buque en lastre o con lastre $f \sim 0,88$
- b) Buque completamente cargado con líquidos en los tanques, en las siguientes proporciones de la carga total a bordo (por ejemplo, carga, líquidos, provisiones, etc.):
 - 1,2 por 100 del total de la carga $f \sim 0,78$
 - 2,1 por 100 del total de la carga $f \sim 0,75$
 - 3,5 por 100 del total de la carga $f \sim 0,73$

Los valores indicados son valores medios. Generalmente los valores observados para «f» varían en $\pm 0,05$ de los dados anteriormente.

5. Si no se dispone de datos preestablecidos se tomará un valor medio de «f» de 0,78. Como regla general debe tenerse en cuenta que «f» aumenta cuando el reparto de masas del buque y su carga es tal que las masas están más alejadas del eje de oscilación. Por ello se debe esperar que:

a) El valor de «f» para un buque sin carga será mayor que para un buque cargado.

b) El valor de «f» para un buque con mucho combustible y agua de lastre (ambos líquidos están generalmente alojados en el doble fondo, lejos del eje de balance) será mayor que el del mismo buque con el doble fondo vacío.

c) El valor de «f» será mayor en buques con grandes espacios vacíos, lastre permanente en el doble fondo o grandes superestructuras y pesos altos que en buques de formas finas con pocas superestructuras o con pesos concentrados en el interior del buque.

6. Los valores de «f» para el buque en lastre y a plena carga se determinarán experimentalmente teniendo en cuenta las consideraciones siguientes:

a) El valor del periodo de balance puede modificarse por la influencia de la proximidad del muelle y de una profundidad limitada de agua. Para evitar estos efectos se recomienda que la medida de periodo de balance se haga en aguas relativamente profundas y alejadas del muelle.

b) En las mediciones del periodo de balance realizadas en el mar se debe tener en cuenta que los periodos de balance obtenidos pueden no ser de oscilaciones libres, sino de oscilaciones forzadas por el oleaje y, con frecuencia, las oscilaciones son irregulares, o sólo regulares, durante intervalos de tiempo demasiado cortos para poder tomar medidas exactas. Sin embargo, puede ser necesario emplear el periodo de balance del buque en la mar para juzgar su estabilidad, debiendo tenerse cuidado de descartar las lecturas que se aparten apreciablemente de la mayoría de las observaciones. Las oscilaciones forzadas que corresponden al periodo del oleaje y difieren del periodo al que parece oscilar

naturalmente el buque se deben rechazar. Para obtener resultados satisfactorios puede ser necesario seleccionar intervalos en que la acción del mar sea menos violenta y descartar un número considerable de observaciones; por ello se debe reconocer que la determinación de la estabilidad por medio del periodo de balance en aguas agitadas ha de considerarse sólo como una estimación orientadora.

c) La experiencia ha demostrado que los resultados del método de medición del periodo de balance son de menos garantía cuanto más se acercan a los valores de GM de 0,2 metros e inferiores.

PROCEDIMIENTO DE ENSAYO

7. El periodo de balance es el tiempo para una oscilación completa del buque. Para asegurar los resultados más exactos, al determinar este valor se deberán observar las precauciones siguientes:

a) El ensayo se llevará a cabo con el barco en puerto, en aguas tranquilas y con la mínima perturbación del viento y la marea.

b) Se iniciará la medición cuando el barco se encuentra escorado en la posición extrema de un balance y a punto de moverse hacia la posición de adrizado. El barco habrá efectuado una **oscilación completa** cuando haya realizado un balance, es decir, haya llegado hasta la posición extrema a la otra banda y vuelto a la de partida (por ejemplo, babor-estribor-babor).

c) Por medio de un cronómetro se medirá el tiempo empleado en cinco oscilaciones completas por lo menos. Después de dejar que el balance se amortigüe por completo se repetirá esta operación por lo menos dos veces más. Si es posible, cada vez se medirán el mismo número de oscilaciones completas para comprobar que las lecturas están de acuerdo, es decir, se repiten dentro de límites razonables. Conociendo el tiempo total para el número de oscilaciones controladas se puede calcular el tiempo medio para una oscilación completa.

d) Se puede conseguir el movimiento de balance: Quitando y poniendo rítmicamente un peso a la mayor distancia posible de crujía, tirando del palo con un cable, haciendo que la tripulación corra en sentido transversal al unísono, o por cualquier otro medio. Sin embargo, y esto tiene la máxima importancia, en cuanto este balance forzado ha empezado, el medio por el que ha sido inducido debe ser interrumpido para permitir que el buque oscile libre y naturalmente. Si el balance se ha provocado poniendo y quitando un peso, es preferible que el peso se mueva mediante una grúa del muelle. Si se emplea una pluma del propio buque el peso se colocará en cubierta, en crujía, en cuanto haya empezado el movimiento.

e) El cronometrado de las oscilaciones deberá realizarse sólo cuando se considere que el buque está oscilando libre y naturalmente, y solamente el tiempo necesario para contar con exactitud estas oscilaciones.

f) Si la experiencia se realiza con el buque próximo al muelle, las amarras se dejarán en banda y el buque se separará del muelle para evitar cualquier contacto con éste durante su balance. Para comprobarlo, y también para obtener alguna idea del número de oscilaciones completas que se pueden contar y cronometrar razonablemente se hará, antes de empezar a anotar los tiempos reales, un ensayo previo de balance.

g) Se tendrá cuidado de asegurar que haya una profundidad razonable de agua bajo la quilla y suficiente separación del costado del buque al muelle."

h) Los pesos importantes que pueden oscilar, por ejemplo, un bote salvavidas, o rodar, por ejemplo, un carretel, se trincarán convenientemente antes de empezar el ensayo. Los efectos de superficies libres en tanques parcialmente llenos se mantendrán lo más pequeños posibles durante el ensayo y en el servicio normal del buque.

DETERMINACIÓN DE LA ESTABILIDAD INICIAL

8. Después de calcular el periodo de balance para una oscilación completa, T_r segundos, la altura metacéntrica inicial GM_0 se puede calcular por la fórmula siguiente:

$$GM_0 = \frac{F}{T_r^2}$$

Donde:

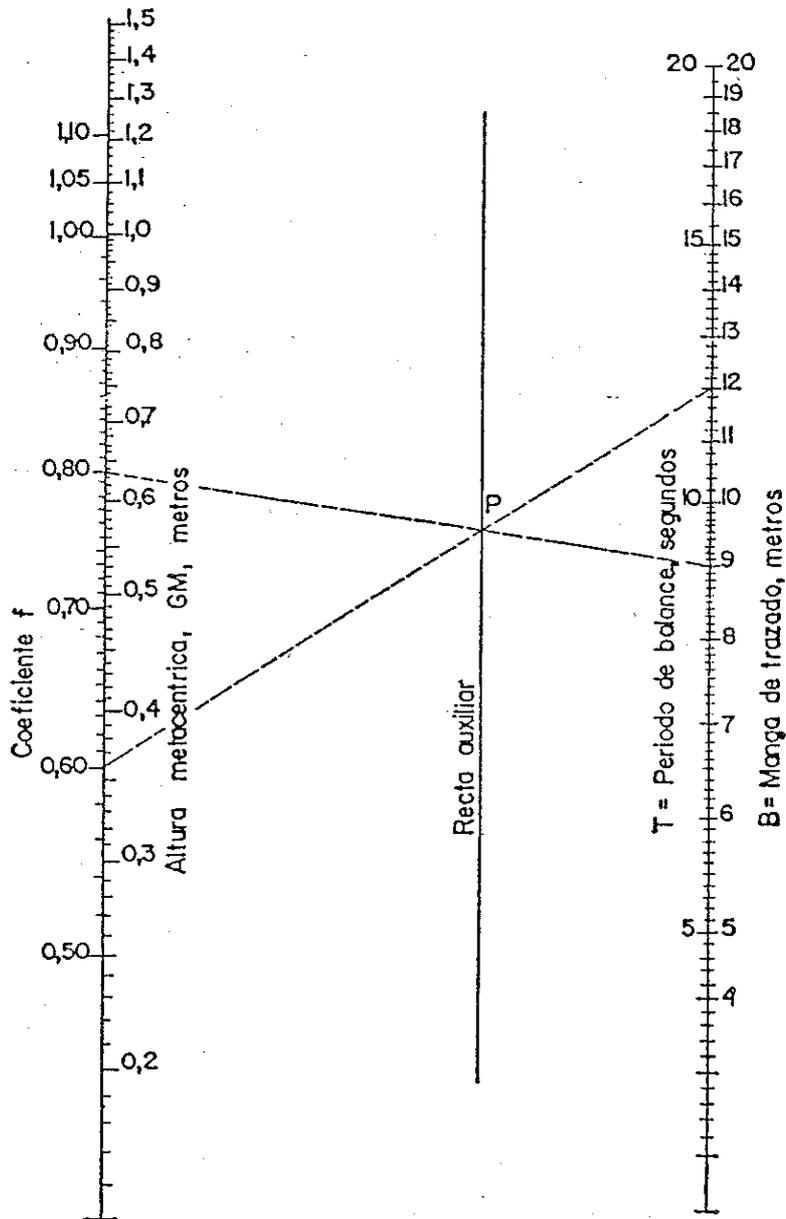
$F = (f.B)^2$ es un coeficiente numérico a determinar para la condición de carga del buque en la experiencia, que se puede obtener de la información de estabilidad para la condición de carga más próxima a aquélla en que se realiza el ensayo.

9. El control de la estabilidad puede simplificarse si se incluye en la información suministrada al buque un diagrama que dé los máximos valores admisibles para el periodo de balance, T_r , en función del calado, teniendo en cuenta los valores aplicables del coeficiente F , o bien uno que dé los valores mínimos de GM_0 en función del calado.

10. La estabilidad inicial GM_0 se puede también calcular gráficamente con facilidad empleando el ábaco siguiente, en el que han de utilizarse los valores de B y T_r . Para ello se unen los valores correspondientes a f y B hasta cortar a la línea auxiliar central del ábaco. Por el punto de intersección con la línea auxiliar se hace pasar una línea recta que pase también por el valor medio de T_r , la cual cortará sobre la escala GM_0 al valor buscado de la altura metacéntrica inicial corregida.

DIAGRAMA PARA EL CONTROL DE LA ESTABILIDAD, MEDIANTE LA MEDIDA DEL PERIODO DE BALANCE

$$GM = \left(\frac{f-B}{T} \right)^2$$



Unir B con f y T con GM haciendo uso del punto P de corte de la recta B-f con la recta media auxiliar.

EJEMPLO: $f=0,8$, $B=9m.$, $T=12$ segundos
Se obtiene $GM=0,36$ metros

TEORÍA DEL BUQUE I

ESTABILIDAD LONGITUDINAL

Introducción:

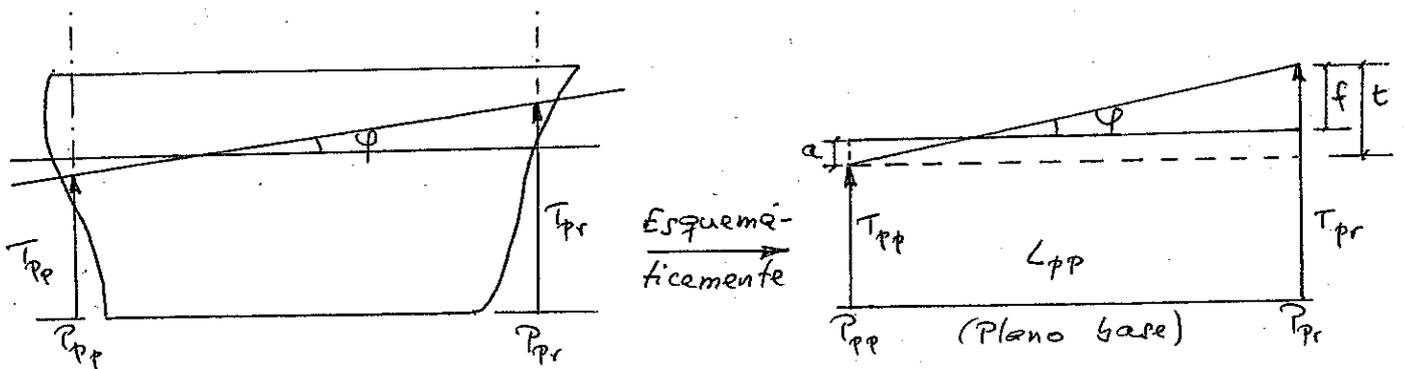
Su estudio es totalmente análogo a lo ya visto en estabilidad transversal, si bien presenta la particularidad de que en la estabilidad longitudinal, prácticamente siempre estaremos en la zona de estabilidad inicial, pues los ángulos φ que se manejan van a ser muy pequeños.

Trimado:

El trimado $\langle t \rangle$ es la medida de la inclinación del buque, y podemos distinguir dos tipos: el trimado absoluto y el relativo.

- El trimado absoluto, o simplemente trimado, es la diferencia que existe entre las caladas en las perpendiculares de proa y popa. Para nosotros va a ser lo mismo que asiento. Algunas veces el trimado lo expresaremos mediante el ángulo φ que formen la flotación de proyecto, o cualquiera paralela a ella (aditado), y la flotación real.

En principio, salvo casos muy concretos, haremos la aproximación $\cos \varphi \approx 1$

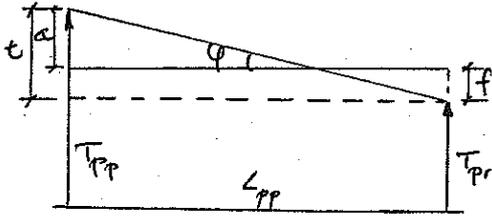


Si llamamos $\langle f \rangle$ a la parte de trimado por proa y $\langle a \rangle$ a la de popa, siempre tendremos que $t = f + a$

El trimado puede tener dos modalidades:

a) Trimado por proa: Siempre que, como en la figura anterior, $T_{pr} > T_{pp}$ ("moja más la proa"). $t = T_{pr} - T_{pp}$

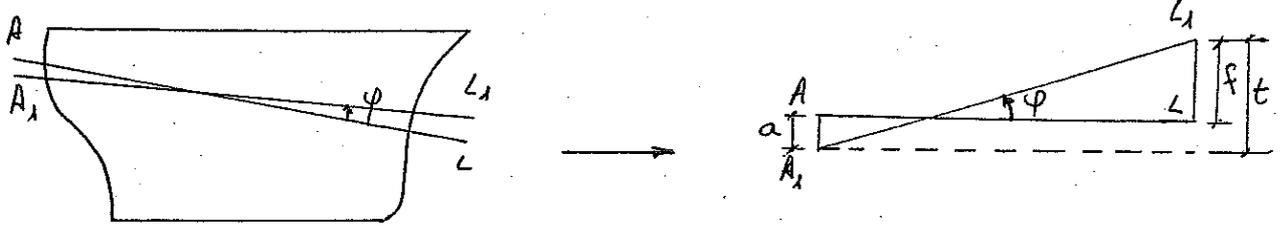
b) Trimado por popa.- Si $T_{pp} > T_{pr}$ ("moje más la popa")



$$t = T_{pp} - T_{pr} \quad \text{y} \quad t = f + a$$

- El trimado relativo es el trimado que se produce por un giro en el plano longitudinal cuando lo medimos con relación a una flotación inicial. Obviamente esta flotación inicial no tiene por qué estar adrizada.

A su vez este trimado puede ser por proa, si sumerge más la proa, o por popa, en caso contrario. El que un trimado relativo sea por proa, por ejemplo, no obliga necesariamente a que el trimado absoluto resultante sea también por proa.



Ejemplo de trimado relativo por proa y absoluto por popa. A, L flotación inicial de referencia y A₁, L₁ flotación final trimada.

Teorema de Euler -

Aunque su demostración ya se vio al estudiar la estabilidad transversal, vamos a repetirlo.

Enunciado: La línea de intersección de dos flotaciones sucesivas, infinitamente próximas pasa por el c.d.p. de la flotación, F .

Planteamiento: En todo momento el peso permanece igual al empuje $P = E$.

Si P no se modifica $\rightarrow P = cte \Rightarrow \Delta = cte \Rightarrow \gamma \nabla = cte \Rightarrow \nabla = cte$.

Por tanto, si la magnitud del volumen sumergido permanece constante en todo momento, el volumen de la cuña que emerge tiene que ser igual al de la cuña que se sumerge. $V_e = V_s = V$.

La demostración del teorema consiste en calcular ambos volúmenes e igualarlos.

• Cuña emergente - $V_e = \int dv_e$

En este caso como elemento diferencial de volumen vamos a tomar franjas perpendiculares al eje de crujía (podrían haber sido longitudinales).

$$V_e = \int dv_e = \int z_e dA_e \text{ con } dA_e = z_e dx_e. \text{ Además}$$

$$z_e = x_e \cdot \tan \varphi \approx x_e \cdot \varphi \text{ por ser } \varphi \text{ un infinitésimo}$$

$$V_e = \varphi \int x_e dA_e$$

• Cuña sumergida - $V_s = \int dv_s$

$$\text{Análogamente } V_s = \int dv_s = \varphi \int x_s dA_s \text{ con } dA_s = z_s dx_s$$

$$\text{Igualando } V_e = V_s = V \rightarrow \varphi \int x_e dA_e = \varphi \int x_s dA_s \rightarrow \int x_e dA_e = \int x_s dA_s$$

Con lo que nos queda una expresión que represente la igualdad de dos momentos estáticos: de la parte del área de la flotación que emerge y la de la parte que se sumerge. Como quiere que ambas partes no tienen ninguna zona común, esto quiere decir que estamos tomando momentos respecto de un eje que pase por el c.d.p. de toda la flotación (F).

Radio metacéntrico longitudinal, \overline{BM}_e .

Si g es el c.d.p. de toda la cuña que emerge, y g_1 el c.d.p. de toda la cuña que se sumerge (ver las figuras anteriores), aplicando el momento de transferencia tenemos:

$$v \cdot \overline{gg}_1 = v \cdot \overline{BB}_1 \quad \text{pero} \quad v \cdot \overline{gg}_1 = v \cdot (\overline{gF} + \overline{Fg}_1) = v \cdot \overline{gF} + v \cdot \overline{Fg}_1 = m_e + m_s, \text{ siendo}$$

$m_e = v \cdot \overline{gF}$ y $m_s = v \cdot \overline{Fg}_1$ los momentos estáticos de la cuña que emerge y de la que se sumerge, respectivamente, respecto del eje de intersección, perpendicular a la línea de crujía, que pasa por F.

$$m_e = v \cdot \overline{gF} = \int dm_e = \int x_e^2 dv_e \quad \text{siendo} \quad dv_e = z_e dA_e \quad \text{y} \quad z_e = x_e \cdot \tan \psi = x_e \cdot \psi$$

por ser ψ un infinitésimo.

$$m_e = \psi \int x_e^2 \cdot dA_e \quad \text{con} \quad dA_e = z_e dx_e.$$

El término $x_e^2 \cdot dA_e$ representa el momento de inercia del elemento de área dA respecto del eje perpendicular a crujía que pasa por F.

$$v_e \overline{gF} = \psi \int x_e^2 \cdot dA_e = \psi \int dI_e$$

$$\text{Análogamente,} \quad \psi \cdot \overline{Fg}_1 = m_s = \int x_s^2 \cdot dv_s = \psi \int x_s^2 \cdot dA_s = \psi \int dI_s$$

$$\text{Por tanto,} \quad v \cdot \overline{gg}_1 = m_e + m_s = \psi \left[\int dI_e + \int dI_s \right] = \psi \cdot I_e$$

Siendo I_e el momento de inercia de toda la flotación respecto del eje horizontal que pase por el centro de la flotación F, y que obviamente no tiene por qué coincidir con la sección media.

Volviendo a la expresión original $v \cdot \overline{gg}_1 = v \cdot \overline{BB}_1$, y sustituyendo $v \cdot \overline{gg}_1$ por el valor obtenido

$$v \cdot \overline{gg}_1 = v \cdot \overline{BB}_1 \rightarrow \psi \cdot I_e = v \cdot \overline{BB}_1 \rightarrow \overline{BB}_1 = \frac{I_e}{v} \cdot \psi$$

Por otro lado, ya sabemos que el metacentro, en este caso longitudinal, es el centro de curvatura de la curva de centros de carena. Confundiendo el arco, la cuerda y la tangente por ser ángulos infinitesimales $\overline{BB}_1 = \overline{BB}_2 = \overline{BM}_L \cdot \varphi$ que sustituido en la expresión anterior

$$\overline{BB}_1 = \overline{BM}_L \cdot \varphi = \frac{I_L}{V} \cdot \varphi \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{BM}_L = \frac{I_L}{V}}$$

Si análogamente a como hicimos en estabilidad transversal suponemos:

$$I_L = n \cdot B \cdot L^3 \quad \text{y} \quad V = \delta LBT \Rightarrow \overline{BM}_L = \frac{I_L}{V} = \frac{nBL^3}{\delta LBT} = \frac{n}{\delta} \frac{L^2}{T}$$

Es decir, \overline{BM}_L es proporcional a la eslora al cuadrado. Como la eslora es la magnitud mayor del buque, el resultado es que el radio metacéntrico longitudinal va a alcanzar un valor muy grande, siendo $\overline{BM}_L \gg \overline{GM}_L$

Por ello, en muchas ocasiones vamos a hacer la aproximación $\overline{BM}_L \approx \overline{GM}_L$

Cálculo del volumen de carena cuando el asiento de la flotación difiere del

asiento de proyecto.-

a) Método general.- Como las curvas hidrostáticas están calculadas para un determinado asiento de proyecto, en principio, sus valores no son válidos cuando la flotación del buque presenta un cierto trimado; especialmente si éste es grande. En este supuesto, para el cálculo del volumen de carena se pueden presentar dos posibilidades:

a.1) El buque no tiene escora, sólo trimado.- El volumen de carena se calcula utilizando las curvas de Boujean, según vimos al comiento del curso.

a.2) El buque, además del trimado presente una cierta escora.- En este caso debemos traer el plano de la flotación sobre el plano de forma, por ejemplo en la caja de cuadernas, después calcular el área de cada sección y por último calcular el volumen de carena integrando estas áreas a lo largo de la eslora.

b) Método aproximado.- En este caso utilizamos los valores de las curvas hidrostáticas, y si entramos en ellas con el calado medio hacemos una pequeña corrección. ($V_{real} = V_{(T_m)} \pm dV$)

Las condiciones de partida son: que no hay escora y que el ángulo de trimado, ψ , es lo suficientemente pequeño como para considerarlo un infinitésimo.

Al considerar ψ un infinitésimo, la intersección entre la flotación real, trimada, y su isocarena (igual V), adrizada, es una recta que pasa por el centro de la flotación F (teorema de Euler). En la realidad, la posición de F va variando a medida que aumenta el trimado, por lo que este método será más preciso cuanto menor sea ψ . ($V_{real} = V_{isoc. adriz.} = V_{(T_m)} \pm dV$)

En todos los casos vamos a suponer que:

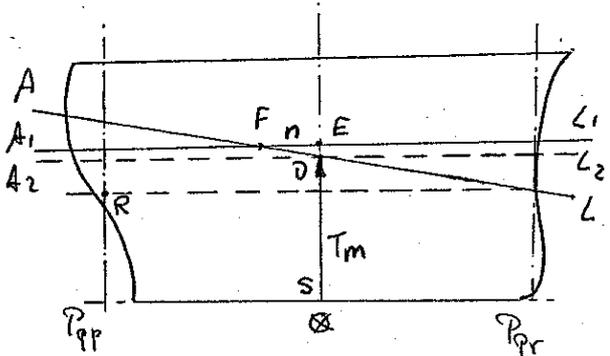
- El calado medio: $T_m = \frac{T_{pp} + T_{pr}}{2}$, coincide con el calado en la sección media.
- La corrección del volumen, dV , sobre el volumen de carena adrizado (de las curvas hidrostáticas) es lo suficientemente pequeño como para que el área de la flotación se considere constante en toda la zona de estudio.

Existen 4 casos posibles, que son el resultado de combinar entre sí dos elementos, cada uno de ellos con dos opciones:

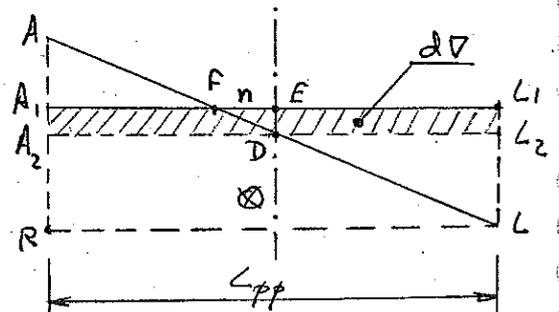
- * que el trimado sea por popa o por proa, y
- * que el c.d.p. de la flotación, F , esté a popa o a proa de la sección media.

Ejemplos

b.1.) Trimado por popa y F a popa de la sección media.-



Más esquemáticamente



Sea:

AL = Flotación real, con asiento, cuyo volumen de carena ∇ queremos determinar.

A_1L_1 = Flotación isocarena de AL y sin trimado, con c.d.p. en F . Su volumen de carena ∇_1 será por tanto igual a ∇ .

$\overline{SD} = T_m$, calado medio. Con este calado estamos suponiendo que entramos en las curvas hidrostáticas.

A_2L_2 = Flotación sin trimado correspondiente a un calado T_m , y cuyo volumen de carena ∇_2 es el que obtenemos en las curvas hidrostáticas.

Viendo las figuras tenemos: $\nabla = \nabla_1 = \nabla_2 + d\nabla$

siendo $d\nabla$ la corrección de volumen (franja rayada), que en este caso es aditiva.

$$d\nabla = A_f \cdot dT = A_f \cdot \overline{ED}$$

Si en vez de trabajar con volúmenes trabajásemos con desplazamientos sería análogo:

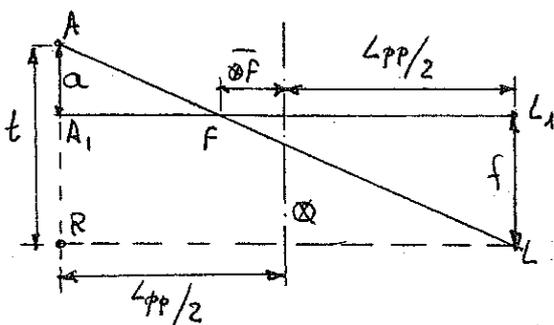
$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 + d\Delta = \Delta_2 + \overline{ED} \cdot TCI$$

Si bien, en este caso la magnitud \overline{ED} tiene que estar expresada en centímetros.

Para determinar \overline{ED} nos tenemos que fijar en que los triángulos: $\triangle ARL$; $\triangle FED$; $\triangle AA_1F$; $\triangle FL_1L$; etc. son todos semejantes entre sí, y por tanto:

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{RL}} \rightarrow \frac{\overline{ED}}{n} = \frac{t}{L_{pp}} \rightarrow \overline{ED} = n \cdot \frac{t}{L_{pp}} = \overline{AF} \cdot \frac{t}{L_{pp}}$$

De semejanza de todos estos triángulos la podemos utilizar para obtener el calado en cualquier punto que nos interese. Así, por ejemplo, para obtener los valores de "a" y "f" del trimado tenemos:



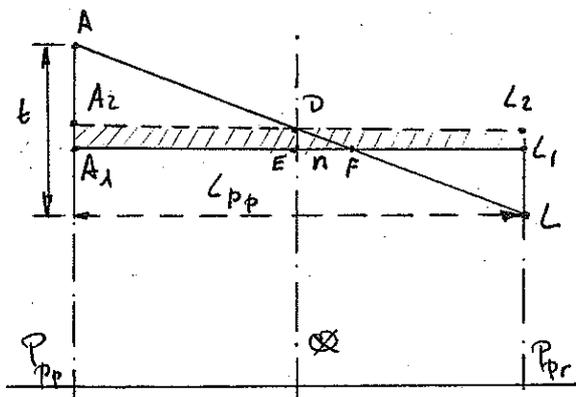
De $\triangle ARL$ y $\triangle FL_1L \rightarrow$

$$\frac{t}{L_{pp}} = \frac{f}{\frac{L_{pp}}{2} + \overline{AF}} \rightarrow f = t \left(\frac{1}{2} + \frac{\overline{AF}}{L_{pp}} \right)$$

$$\text{De } \triangle ARL \text{ y } \triangle AAF \rightarrow \frac{t}{L_{pp}} = \frac{a}{\frac{L_{pp}}{2} - \overline{\Phi F}} \rightarrow a = t \left(\frac{1}{2} - \frac{\overline{\Phi F}}{L_{pp}} \right)$$

Si bien, una vez obtenido uno de ellos, a o f , es más fácil y exacto calcular el otro por la expresión: $t = a + f$.

b.2.) Trimado por popa y F a proa de la sección media.



Manteniendo las mismas denominaciones que en el caso anterior

$$\nabla = \nabla_1 = \nabla_2 - d\nabla$$

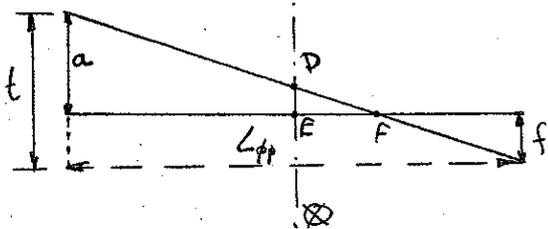
Siendo, aquí también, $d\nabla$ el volumen rayado.

$$d\nabla = A_f \cdot \overline{ED}$$

Por la semejanza de los triángulos de las flotaciones

$$\frac{t}{L_{pp}} = \frac{\overline{ED}}{n} \rightarrow \overline{ED} = \frac{t}{L_{pp}} \cdot n = \frac{t}{L_{pp}} \cdot \overline{\Phi F}$$

Análogamente para obtener los trimados parciales f y a



$$\frac{t}{L_{pp}} = \frac{a}{\frac{L_{pp}}{2} + \overline{\Phi F}} \rightarrow a = t \left(\frac{1}{2} + \frac{\overline{\Phi F}}{L_{pp}} \right)$$

$$\frac{t}{L_{pp}} = \frac{f}{\frac{L_{pp}}{2} - \overline{\Phi F}} \rightarrow f = t \left(\frac{1}{2} - \frac{\overline{\Phi F}}{L_{pp}} \right)$$

$$\text{Con } t = a + f.$$

Los otros dos casos que faltan: trimado por proa, y F a proa y popa de la sección media, te dejan como ejercicio.

OBSERVACIONES:

- En todo este desarrollo hemos supuesto que entramos en las curvas hidrostáticas con el calado medio, T_m , donde tenemos el valor ∇_2 , sobre el que hacemos la corrección $d\nabla$. Si hubiésemos entrado con el calado correspondiente al punto F (T_f), obtendríamos directamente el volumen de carena, ∇ , y no tendríamos que hacer ninguna corrección.

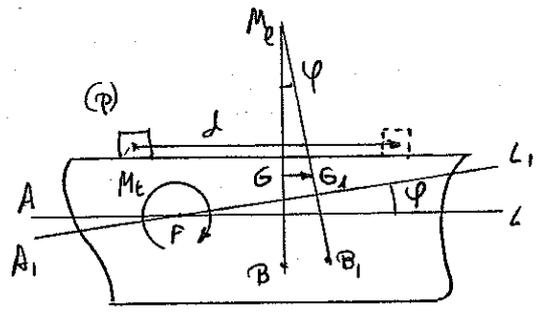
- Recíprocamente, si conocemos el volumen de carene real (V), y entramos con este valor en las curvas hidrostáticas, el calado que obtenemos no es T_m , sino T_F .
- Los valores de dV ó $d\Delta$ no van a ser muy grandes (de hecho en la práctica, a bordo de los buques, se suelen despreciar, no así nosotros). En cuanto a los demás parámetros (\overline{GB} , \overline{GF} , etc.) que obtenemos de las curvas hidrostáticas entrando con T_m , los damos por válidos sin hacerles ninguna corrección (no se confunda esto con el caso de la carga de un peso relativamente pequeño, que veremos más adelante).
- Hay que corregir Δ cuando el T de las curvas hidrostáticas no coincide con el real

Momento para alterar el trimado un centímetro (MTC).-

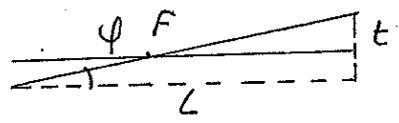
Hipótesis de partida: el ángulo de trimado, ψ , es lo suficientemente pequeño como para considerarlo un infinitésimo a efectos prácticos.

Si el buque gira se por el efecto de un momento de trimado. Al suponer que el ángulo ψ es un infinitésimo, la flotación girará sobre un eje que pase por el centro de la flotación F (Teorema de Euler). El momento de trimado puede ser debido a una carga interna o a una carga externa

a) Carga interna, por ejemplo, un peso p que se traslada una distancia d .



Por el momento de transferencia el c.d.g. del buque se trasladará desde G hasta G_1 ($G \rightarrow G_1$) \Rightarrow G_1 deja de estar alineado con el c.d.c. inicial $B \Rightarrow$ Aparecerá un momento de trimado M_t



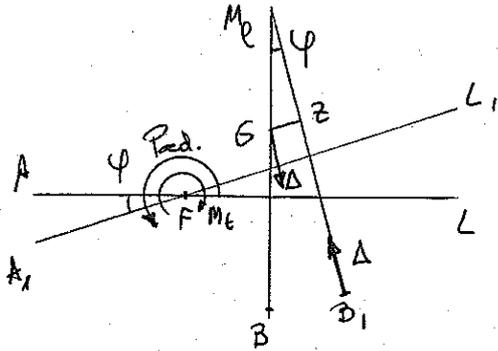
$$\left. \begin{aligned} M_t &= \Delta \cdot \overline{GG_1} = \Delta \cdot \overline{GM_e} \cdot \text{tg } \psi \\ \text{tg } \psi &= \frac{t}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_t = \Delta \cdot \overline{GM_e} \cdot \frac{t}{L}$$

Si queremos que el trimado sea 1 centímetro ($t = 1\text{cm}$), pero que $\text{tg } \psi$ quede adimensional con la altura en metros, tendremos

$$\text{tg } \psi = \frac{t}{L} = \frac{100 \text{ (m)}}{L \text{ (m)}} \rightarrow M_t = MTC = \Delta \cdot \overline{GM_e} \frac{1}{100 \cdot L} \Rightarrow$$

$$MTC = \frac{\Delta \cdot \overline{GM_e}}{100 \cdot L}$$

b) Carga externa.- Δ constante y c.d.p. G fijo.



Debido al momento de trimado externo, M_t , la flotación pasará de AL a A_1L_1 , girando sobre el eje que pasa por el centro de la flotación \Rightarrow El c.d.c. pasará de B a B_1 ($B \rightarrow B_1$) girando sobre el metacentro longitudinal M_e .

En el ángulo de equilibrio final, φ , el momento de trimado se verá equilibrado por el par adrizante $P_a = \Delta \cdot \overline{Gz}$

$$M_t = P_a \rightarrow M_t = \Delta \cdot \overline{Gz}$$

pero $\overline{Gz} = \overline{GM}_e \cdot \sin \varphi \approx \overline{GM}_e \cdot \tan \varphi = \overline{GM}_e \cdot \frac{t}{L}$, que substituyendo queda

$$M_t = \Delta \cdot \overline{GM}_e \cdot \frac{t}{L}$$

Haciendo $t = 1 \text{ cm}$, y manteniendo adimensional el cociente $\frac{t}{L}$, nos queda la misma expresión que en el caso anterior ($M_t \equiv MTC$)

$$MTC = \frac{\Delta \cdot \overline{GM}_e}{100 L}$$

Fórmula aproximada y fórmula práctica.-

La expresión que hemos obtenido anteriormente sería la fórmula "exacta". Sin embargo, \overline{GM}_e no se conoce bien hasta las fases finales del proyecto, por lo que si tenemos en cuenta que \overline{BM}_e y \overline{GM}_e son muy grandes, es decir, que el parámetro \overline{BG} suele ser del orden del 1 al 3% de \overline{BM}_e , podemos hacer la aproximación $\overline{GM}_e \approx \overline{BM}_e \rightarrow$

$$MTC \approx \frac{\Delta \cdot \overline{BM}_e}{100 L}$$

Como $\overline{BM}_e = \frac{I_e}{\nabla}$, si lo substituímos en la expresión anterior

$$MTC = \frac{\Delta \cdot \overline{BM}_e}{100 \cdot L} = \frac{\Delta \cdot I_e}{\nabla \cdot 100 \cdot L} = \frac{\gamma \cdot \nabla \cdot I_e}{\nabla \cdot 100 L} \Rightarrow MTC = \frac{\gamma \cdot I_e}{100 \cdot L}$$

Esta es la fórmula práctica que se utiliza para calcular los valores de MTC en las curvas hidrostáticas.

Paso de mar a río.

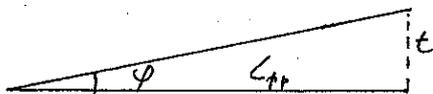
Como vemos en la fórmula que se utiliza para construir la curva hidrostática de los MTC aparece el peso específico γ , el cual habrá que suponer, pero puede ocurrir que el peso específico real del agua en la que flota el buque sea distinto del supuesto, como ocurre, por ejemplo, al pasar de mar a río.

Para determinar los MTC de un río (MTC_R) conociendo los del mar (MTC_M), correspondientes a un calado dado, hacemos:

$$\left. \begin{aligned} MTC_M &= \frac{\gamma_M \cdot I_R}{100 \cdot L} \\ MTC_R &= \frac{\gamma_R \cdot I_R}{100 \cdot L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow MTC_R = \frac{\gamma_R \cdot I_R}{100 \cdot L} = \frac{\gamma_M}{\gamma_R} \Rightarrow \boxed{MTC_R = MTC_M \cdot \frac{\gamma_R}{\gamma_M}}$$

Observación:

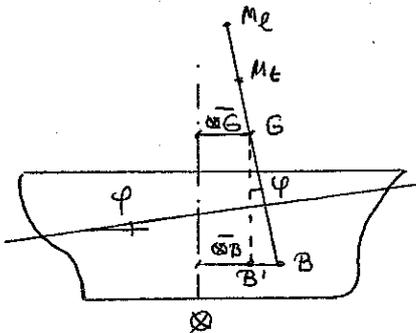
Como vemos en las fórmulas de los MTC aparece el término L . Nosotros consideramos que la L que se debe utilizar es la L entre perpendiculares, L_{pp} , ya que se deriva del término $\tan \varphi = \frac{t}{L}$, siendo t la variación de calados que se produce en las perpendiculares.



$$\tan \varphi = \frac{t}{L_{pp}}$$

No obstante nos podemos encontrar casos en los que para determinar la curva hidrostática de los MTC se ha utilizado la L en la flotación correspondiente a cada calado.

Posiciones relativas entre el c.d.c. y el c.d.g. Traslado de pesos.



Como sabemos, si un buque está en equilibrio, la recta que une los puntos B y G tiene que ser perpendicular a la flotación correspondiente. Así, si la flotación no está adrizada, tendríamos:

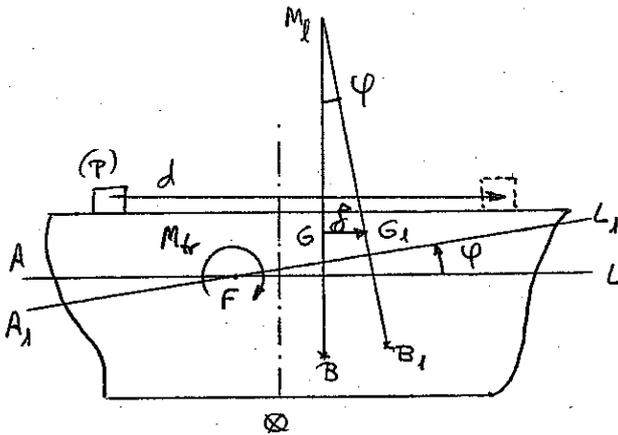
$$\overline{BB'} = \overline{BG} \pm \overline{BG} \cdot \tan \varphi$$

Siendo el signo \oplus cuando el trimado es por proa, como en la figura, y \ominus cuando es por popa.

Ahora bien, cuando podamos considerar que el trimado es muy pequeño, lo cual ocurre en la gran mayoría de los casos, podemos hacer la aproximación $\overline{OG} \approx \overline{OB}$

Es decir, consideremos el término $\overline{BG} \cdot \tan \psi$ despreciable frente a \overline{OG}

Traslado de un peso.



Supongamos que el buque tiene inicialmente una flotación AL. Si está en equilibrio, la recta \overline{BG} será perpendicular a esa flotación.

Si ahora trasladamos un peso p una distancia d , el c.d.p. del buque se desplazará hasta G_1 , una distancia δ , que por el momento de transferencia tendremos

$$p \cdot d = \Delta \cdot \delta$$

Como consecuencia de ello el nuevo c.d.p. G_1 deja de estar alineado con el c.d.c. original B , lo que hace que surja un momento de trimado

$$M_{tr} = \Delta \cdot \delta$$

que hará que el buque gire hasta alcanzar una nueva flotación de equilibrio A_1L_1

Si consideramos que los trimados absolutos y relativos que estamos manejando son pequeños podemos suponer $\overline{OG} \approx \overline{OB}$ y $\overline{OG}_1 \approx \overline{OB}_1$, siendo el momento de trimado por proa de la flotación AL a la A_1L_1

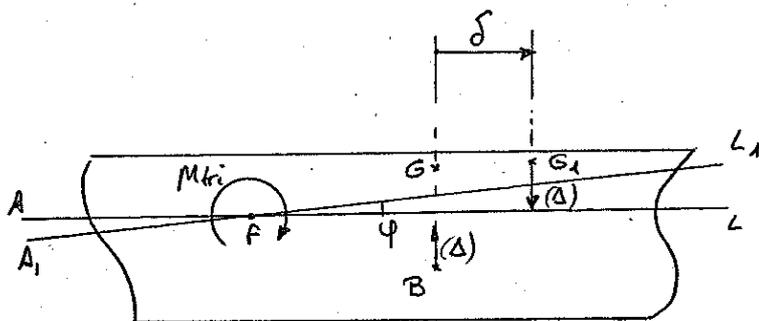
$$M_{tr} = \Delta \cdot \delta = \Delta \cdot \overline{GG}_1 \approx \Delta (\overline{OG}_1 - \overline{OB}) \text{ y a su vez } \Delta \cdot \delta = p \cdot d$$

El trimado relativo (en centímetros) entre la flotación inicial AL y la final A_1L_1 vendrá dado por

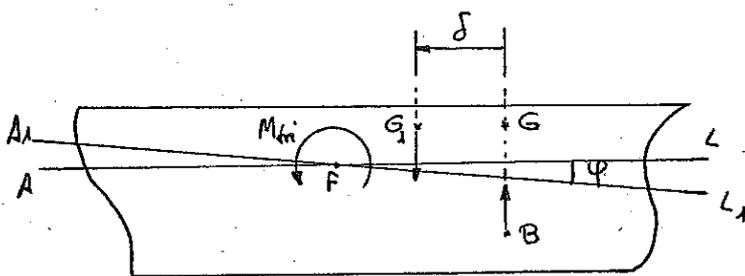
$$t = \frac{M_{tri}}{MTC} = \frac{\Delta \cdot \delta}{MTC} = \frac{P \cdot d}{MTC} = \frac{\Delta (\bar{OG}_1 - \bar{OB})}{MTC}$$

En los ejercicios, además del valor absoluto del trimado relativo t , necesitamos conocer su dirección: por proa o por popa. Para ello nos tenemos que fijar en la posición relativa entre el c.d.g. final G_1 y el c.d.c. inicial B .

- G_1 a proa de $B \Rightarrow A, L_1$ tendrá un trimado relativo por proa respecto a A, L



- G_1 a popa de $B \Rightarrow$ El trimado relativo será por popa.



Notas:-

- 1.- La posición de la sección media en estos casos no tiene ninguna importancia, no es más que una mera referencia, lo que realmente importa es la posición relativa entre G_1 y B
- 2.- De flotación inicial no tiene por qué estar necesariamente admitida.
- 3.- La expresión $t = \frac{M_{tri}}{MTC}$ solamente nos da el trimado relativo respecto de la flotación inicial. Para obtener los calados finales y el trimado absoluto resultante tendríamos que añadir a los calados iniciales los valores relativos obtenidos de t , f y a

$$\left. \begin{aligned} T_{pp\text{final}} &= T_{pp\text{ini}} \pm f \\ T_{pp\text{f}} &= T_{pp\text{ini}} + a \end{aligned} \right\} \rightarrow t_{abs} = T_{pp\text{f}} - T_{pp\text{ini}}$$

Efectos sobre el trimado de la adición de pesos a bordo. Flotación resultante.

Añadir (o quitar) un peso a bordo produce:

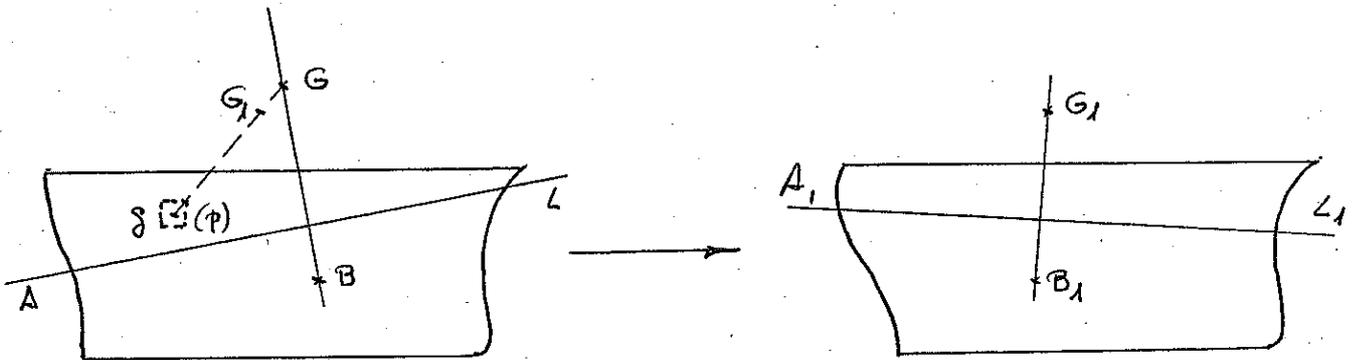
a) Una variación del desplazamiento: $\Delta_1 = \Delta + \varphi$

b) Un cambio en la posición del c.d.p. del buque: desde G pasa a G_1

Y como consecuencia:

a) Cambiará la flotación: Desde una flotación inicial A, L se pasará a otra final A_1, L_1 , de tal forma que el nuevo empuje equilibre al peso final resultante: $\gamma \nabla_1 = \Delta + \varphi$.

b) Si A_1, L_1 es la flotación final de equilibrio y B_1 su c.d.c. correspondiente, se tendrá que cumplir la condición de que B_1 y G_1 queden alineados en la misma vertical respecto a la flotación A_1, L_1 .



Situación inicial y peso añadido.

Situación final

El problema que nos planteamos es pues determinar la flotación final A_1, L_1 , con sus \bar{B}_1 y \bar{G}_1 . Veamos los casos de estudio.

1.- Procedimiento general

Este procedimiento es válido siempre, tanto si la modificación de pesos es grande como si es pequeña. No obstante, dado lo engorroso que resulte su aplicación, su utilización práctica se reduce únicamente a aquellos casos en los que el trimado es excesivamente grande.

En este procedimiento suponemos que no hay escora, pero que al existir un cierto arriente no son aplicables los valores de las curvas hidrostáticas, por lo que tenemos que acudir a las curvas de Boujeau. Los parámetros de cálculo son los siguientes:

a) Condiciones iniciales. - Necesitamos conocer el desplazamiento Δ , y la posición del c.d.p. del buque, G , iniciales. Si no son dato tendremos que calcularlos con los medios disponibles, por ejemplo, con una experiencia de estabilidad, curvas de Boujean, etc.

b) Adición del peso, P , con c.d.p. en g .

• Desplazamiento final: $\Delta_1 = \Delta + P$

• Centro de gravedad final (G_1): Se determina tomando momentos respecto a cualquier referencia que nos interese. Por ejemplo, tomando momentos respecto al plano base y a la sección media \rightarrow

$$\overline{KG}_1 = \frac{\Delta \cdot \overline{KG} + P \cdot \overline{K'g}}{\Delta_1} \quad \text{y} \quad \overline{\Phi G}_1 = \frac{\Delta \cdot \overline{\Phi G} + P \cdot \overline{\Phi g}}{\Delta_1}$$

c) Determinación de la flotación final A_1L_1 . - La flotación final se obtiene utilizando las curvas de Boujean mediante un proceso iterativo de tanteos.

Se trata de encontrar una flotación que cumpla las condiciones:

c.1) Su volumen de carena, V_1 , sea tal que $\gamma V_1 = \Delta_1 = \Delta + P$ y

c.2) su c.d.c., B_1 , tiene que estar en la misma vertical respecto de A_1L_1 que el c.d.p. G_1 , previamente calculado.

Si el buque además tuviera escora tendríamos que realizar todos estos pasos utilizando el plano de formas.

2.- Método simplificado del procedimiento general.

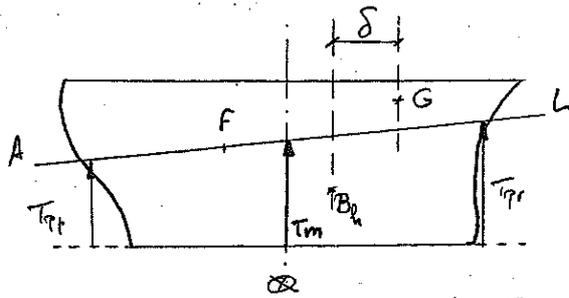
Este método consiste en utilizar los valores de las curvas hidrostáticas, por lo que el trimado debe ser lo suficientemente pequeño. Los resultados serán tanto más precisos cuanto mejor conozcamos la posición inicial del c.d.p. del buque y su desplazamiento. Los pasos serían los siguientes:

a) Condiciones iniciales: desplazamiento y posición del c.d.p. del buque. Si no son dato habrá que calcularlos. Así, por ejemplo, si conocemos los calados en las perpendiculares, y el trimado no es muy grande, entramos en las curvas hidrostáticas con el calado medio (T_m). Superponemos que obtenemos los valores (subíndice h): Δ_h ; $\overline{\Phi B}_h$; $\overline{\Phi A}_h$; TCE_h y MTC_h . Aplicando los procesos ya conocidos para determinar el desplazamiento, y haciendo las aproximaciones:

$$\overline{\Phi F} \approx \overline{\Phi A}_h ; \quad MTC \approx MTC_h ; \quad \text{etc.}$$

tenemos:

$$\overline{\Phi F}_h = \overline{\Phi F} ; t = T_{pr} - T_{pp} \quad \text{y} \quad t \psi = \frac{t}{L_{pp}}$$



• Desplazamiento inicial (Δ)

$$\Delta = \Delta_h \pm \overline{\Phi F}_h (Cm) + t \psi = TCI_h \Rightarrow \Delta$$

• $\overline{\Phi G}$

$$t = T_{pr} - T_{pp} = \frac{M_{tri}}{MTC} = \frac{\Delta \cdot \delta}{MTC_h} \Rightarrow \delta \rightarrow \overline{\Phi G} = \overline{\Phi B}_h \pm \delta$$

Es decir, $\overline{\Phi G} = \overline{\Phi B}_h + \delta$ si el trimado es por proa y $\overline{\Phi G} = \overline{\Phi B}_h - \delta$ si es por popa

b) Adición del peso ρ : Desplazamiento y c.d.p. finales

$$\Delta_1 = \Delta + \rho \quad \text{y} \quad \overline{\Phi G}_1 = \frac{\Delta \cdot \overline{\Phi G} + \rho \cdot \overline{\Phi G}}{\Delta + \rho}$$

c) Determinación de los calados finales.

- Entramos en las curvas hidrostáticas con Δ_1 y leemos: $\overline{\Phi B}'_h$; $\overline{\Phi F}'_h$; MTC'_h y T'_h , que corresponden a los valores de Δ_1 con el buque adrizado.

- Si los valores de $\overline{\Phi B}'_h$ y $\overline{\Phi G}_1$ no coinciden, el buque tendrá un trimado final t_1

$$t_1 = \frac{M_{tri}}{MTC'_h} = \frac{\Delta_1 \cdot \delta_1}{MTC'_h}$$

• Si $\overline{\Phi G}_1 > \overline{\Phi B}'_h$ el trimado será por proa $\rightarrow \delta_1 = \overline{\Phi G}_1 - \overline{\Phi B}'_h$

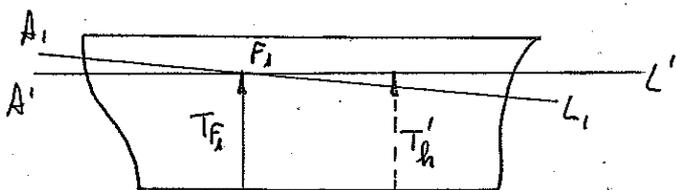
• Si $\overline{\Phi G}_1 < \overline{\Phi B}'_h$ el trimado es por popa $\rightarrow \delta_1 = \overline{\Phi B}'_h - \overline{\Phi G}_1$

- Como hemos entrado en las curvas hidrostáticas con Δ_1 , el calado T'_h tiene que ser igual a T_F , correspondiente al centro de p. de la flotación $A_1 L_1$ (T. de Euler)

$A_1 L_1$ flotación final que andamos buscando.

$A' L'$ flotación isocarena de $A_1 L_1$, pues su volumen ($V_1 = \frac{\Delta_1}{\gamma}$) es el mismo

El eje de corte entre $A_1 L_1$ y $A' L'$ para que el c.d.p. de la flotación $F_1 \Rightarrow T_F = T'_h$.



Evidentemente seguimos suponiendo $\overline{\Phi F}'_h \approx \overline{\Phi F}_1$

- Conocidos t_i ; $\overline{\text{AF}}'_h = \overline{\text{AF}}_h$ y $T_{F'_h} = T_{F_h}$ podemos conocer los calados en las perpendiculares planteando la semejanza de triángulos ya visto.

Veamos un ejemplo:

Sea un buque de $L_{pp} = 120 \text{ m}$; $T_{pr} = 8,000 \text{ m}$ y $T_{pp} = 7,000 \text{ m}$.

a) Condiciones iniciales: Δ y $\overline{\text{CG}}$

$$t = T_{pr} - T_{pp} = 8,000 - 7,000 = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \rightarrow \tan \varphi = \frac{t}{L_{pp}} = \frac{1}{120} = 0,008 \rightarrow \varphi = 0,477^\circ$$

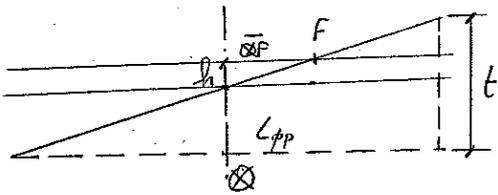
luego podemos considerar que el trimado es pequeño.

$$T_m = \frac{T_{pr} + T_{pp}}{2} = \frac{8,000 + 7,000}{2} = 7,500 \text{ m.}$$

a.1.) Δ .

Supongamos que entramos en las curvas hidrostáticas con $T = 7,5 \text{ m}$ y obtenemos: $\Delta_h = 11280 \text{ Tm}$; $MTC_h = 135 \text{ Tm x m}$; $\overline{\text{B}}_h = +1,930 \text{ m}$; $\overline{\text{F}}_h = +1,800 \text{ m}$ y $TCl_h = 55 \text{ Tm}$.

Hacemos las correcciones por trimado.



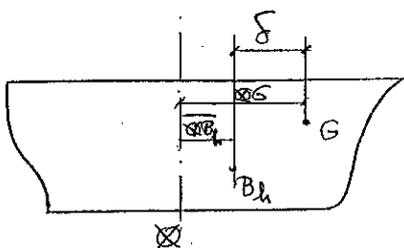
$$\frac{t}{L_{pp}} = \frac{h}{\overline{\text{F}}_h} \rightarrow h = t \cdot \frac{\overline{\text{F}}_h}{L_{pp}} = 100 \cdot \frac{1,800}{120} = 1,5 \text{ cm.}$$

$$\Delta = \Delta_h + h (\text{cm}) \times TCl = 11280 + 1,5 \times 55$$

$$\Delta = \underline{\underline{11362,500 \text{ Tm.}}}$$

a.2.) $\overline{\text{CG}}$

Al estar trimado por proa $\Rightarrow \overline{\text{CG}} > \overline{\text{B}}_h = +1,930 \text{ m}$.



$$t (\text{cm}) = \frac{M_{tri}}{MTC} = \frac{\Delta \cdot \delta}{MTC_h} \rightarrow \delta = \frac{t + MTC_h}{\Delta} = \frac{100 + 135}{11362,500} = 1,188 \text{ m.}$$

$$\overline{\text{CG}} = \overline{\text{B}}_h + \delta = 1,93 + 1,188 \rightarrow \overline{\text{CG}} = \underline{\underline{3,118 \text{ m}}}$$

b) Quitamos un peso $p = 5000 \text{ Tm}$ en $\overline{\text{CF}} = +3,60 \text{ m}$ (proa)

b.1.) Δ_1

$$\Delta_1 = \Delta - p = 11362,5 - 5000 \rightarrow \Delta_1 = \underline{\underline{6362,500 \text{ Tm}}}$$

b.2) \bar{G}_1 Tomando momentos respecto a \bar{G}

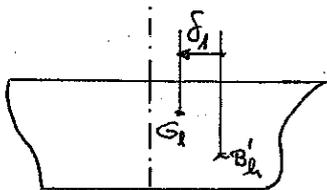
$$\bar{G}_1 = \frac{\Delta \cdot \bar{G} + (-P) \cdot \bar{G}}{\Delta_1} = \frac{11362,5 + 3,118 - 5000 \times 3,60}{6362,5} \rightarrow \bar{G}_1 = 2,739 \mu$$

c) Calados finales

Entramos en las curvas hidrostáticas con $\Delta_1 = 6362,5 \text{ Tm} \rightarrow$ Suponemos que obtenemos: $T'_L = 4,210 \text{ m}$; $\bar{B}'_L = +3,10 \text{ m}$; $MTC'_L = 107 \text{ Tm} \cdot \text{m}$ y $\bar{F}'_L = +1,80 \text{ m (Pr)}$

c.1.) Trimado

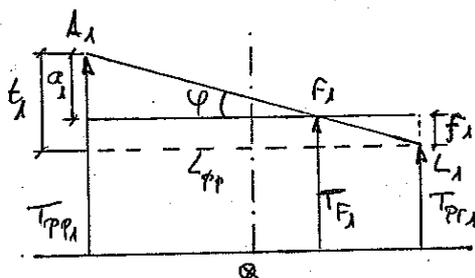
$$\bar{B}'_L = 3,10 \text{ m} > \bar{G}_1 = 2,739 \mu \Rightarrow \text{Trimará por popa.}$$



$$t_1 = \frac{M_{G_1}}{MTC'_L} = \frac{\Delta_1 \cdot \delta_1}{MTC'_L} = \frac{\Delta_1 (\bar{B}'_L - \bar{G}_1)}{MTC'_L} = \frac{6362,5 \cdot (3,10 - 2,739)}{107} \rightarrow$$

$$t_1 = 21,440 \text{ cm} = 0,214 \text{ m.}$$

c.2.) Calados finales.



Al trimar por popa tendremos:

$$\frac{t_1}{L} = \frac{a_1}{\frac{L}{2} + \bar{F}'_L} \rightarrow a_1 = t_1 \left(\frac{L/2}{L} + \frac{\bar{F}'_L}{L} \right) = t_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{F}'_L}{L} \right)$$

$$a_1 = 0,214 \left(\frac{1}{2} + \frac{1,80}{120} \right) \rightarrow a_1 = 0,110 \text{ m}$$

$$f_1 = t_1 - a_1 = 0,214 - 0,110 \rightarrow f_1 = 0,104 \text{ m}$$

$$T_{Pr1} = T_{F_1} - f_1 \quad \text{y} \quad T_{Pr1} = T_{F_1} + a_1$$

Como en este caso hemos entrado en las curvas hidrostáticas con el desplazamiento exacto (Δ_1), el calado que obtenemos es $T'_L = T_{F_1} = 4,210 \text{ m}$

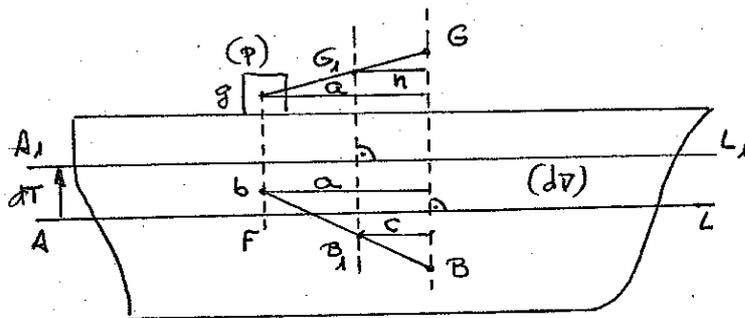
$$T_{Pr1} = T_{F_1} - f_1 = 4,210 - 0,104 \rightarrow \boxed{T_{Pr1} = 4,106 \mu}$$

$$T_{Pr1} = T_{F_1} + a_1 = 4,210 + 0,110 \rightarrow \boxed{T_{Pr1} = 4,320 \text{ m}}$$

3. Carga de pesos relativamente pequeños

En este caso, además de las consideraciones relativas a los trimados pequeños en las distintas flotaciones, hacemos la hipótesis previa del buque de costados rectos, es decir, que el área de la flotación va a permanecer constante en todas las variaciones de calado que se produzcan, sean, en principio, grandes o pequeñas. En la práctica, como ya comentamos, los buques de costados rectos no son muy comunes, por lo que, en un caso general, para no cometer mucho error, al considerar que el área de la flotación permanece constante, las variaciones de calados que se produzcan no pueden ser muy grandes, y por tanto, el peso que se cargue o se descargue tiene que ser relativamente pequeño comparado con el desplazamiento.

3.1. Dado un peso p , si consideramos que el área de la flotación permanece constante, al cargarlo en la vertical del centro de la flotación no se modifica el asiento.



Sea Δ el desplazamiento correspondiente a la flotación inicial AL , con c.d.c. en B y c.d.g. en G
 Si el buque está en equilibrio la recta \overline{BG} es perpendicular a AL

Supongamos que cargamos un peso p en la vertical del c.d.g. de la flotación ($\overline{qg} = \overline{qF}$). Si suponemos que la flotación es constante en toda la variación de calado dT que se produzca, el c.d.g. de la rebanada A_1L_1 , de volumen dV , estará a su vez en la misma vertical que F ($\overline{B_1b} = \overline{qF}$), y además tendremos que $p = \delta \cdot dV$

Una vez cargado el peso tendremos un nuevo c.d.g. G_1 , alineado con q y G , y una flotación A_1L_1 , con c.d.c. B_1 , también alineado con b y B .

Tomando momentos de los pesos respecto a la recta BG

$$\Delta \cdot 0 + p \cdot a = (\Delta + p) \cdot n \rightarrow n = \frac{p \cdot a}{\Delta + p}$$

Análogamente con los volúmenes

$$V \cdot \rho + dV \cdot \rho = (V + dV) \cdot \rho \rightarrow c = \frac{dV \cdot \rho}{V + dV} = \frac{dV \cdot \rho}{(V + dV)} \cdot \frac{\gamma}{\gamma} = \frac{P \cdot \rho}{\Delta + P} = n \Rightarrow \underline{c = n}$$

Es decir, si $c = n$ quiere decir que B_1 y G_1 vuelven a estar alineados en una línea que es paralela a la anterior BG , y por tanto la flotación final A_1L_1 será paralela a la inicial AL .

Nota.- Esta demostración sería el h' , faltaría por demostrar el t' .

3.2. Proceso de cálculo.

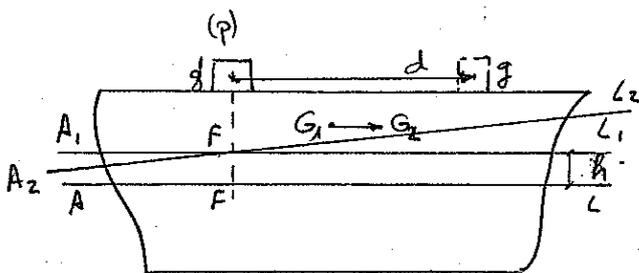
A efectos de cálculo el proceso lo descomponemos en dos pasos:

a) Inmersión paralela. - El peso p se carga (o se quita) en la vertical del c.d.p. de la flotación $\rightarrow \overline{OF} = \overline{OF'}$ ($AL \rightarrow A_1L_1$)

La variación de calado $dT = h$ debida a la inmersión paralela se calcula mediante:

$$h \text{ (cm)} = \frac{P}{T \cdot C I} \quad \text{ó} \quad h = \frac{P}{T \cdot C I} \cdot \frac{1}{100} \quad \text{ó} \quad h = \frac{P}{A_f \cdot \gamma} \quad (\text{ambos en metros})$$

b) Trimado relativo. - El peso p traslada desde la vertical de F hasta su posición real ($\overline{OF'} \rightarrow \overline{OF}$) una distancia d . ($A_1L_1 \rightarrow A_2L_2$)



Momento de trimado $\rightarrow M_{tri} = p \cdot d = \Delta \cdot \overline{GG_2}$

$$\text{Trimado} \rightarrow t = \frac{M_{tri}}{MTC} = \frac{p \cdot d}{MTC} = \frac{\Delta \cdot \overline{GG_2}}{MTC}$$

A la hora de estudiar el trimado hay que tener en cuenta que G "sigue" a P , y que el c.d.c. B "sigue" a G

Una vez conocido el trimado y su sentido ^(*) (por proa o por popa) podemos plantear los triángulos de las flotaciones y determinar los valores de "f" y "a".

(*) Se sigue recordando que el trimado así calculado es el trimado relativo de la flotación A_2L_2 respecto de la A_1L_1 , que no tiene nada que ver con el trimado absoluto final de la diferencia de calados en las perpendiculares.

Calados finales. - Una vez conocidas f y a los calados finales T_{prf} y T_{ppt} serán:

$$T_{prf} = T_{pri} + h \pm f \quad \text{y} \quad T_{ppt} = T_{ppi} + h \mp a.$$

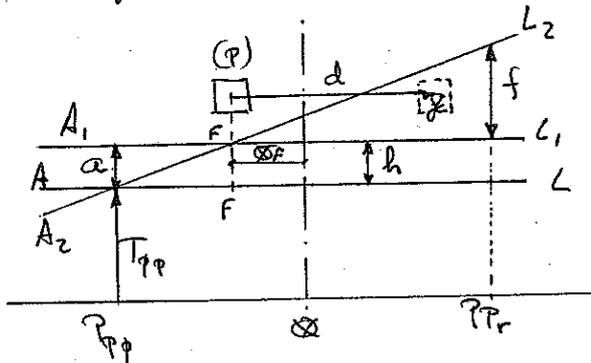
Los signos \pm de f y \mp de a dependerán de que el trimado sea por proa o por popa respectivamente.

Nota.- Si en vez de cargar el peso fuese una descarga, el proceso de cálculo sería el mismo, sin más que sustituir " p " por " $-p$ ", lo que nos dará una emersion ($h < 0$).

- Estudio de diversos casos considerados como adición de pesos pequeños:

1.- Dónde hay que cargar un peso relativamente pequeño para que el calado en la perpendicular de popa no varíe.

La condición que nos imponen es que el calado a popa inicial tiene que ser igual al calado a popa final después de cargar el peso. ($T_{ppi} = T_{ppt}$)



a) Inmersión paralela. - Cargamos el peso p en la perpendicular del c.d.f. de la flotación F .

$$h = \frac{P}{TCI} \quad (\text{en cm.})$$

$$h = \frac{P}{TCI} \cdot \frac{1}{100} \quad (\text{en metros})$$

b) Trimado. - Traslado del peso desde la posición anterior ($\odot F$) hasta su posición final real ($\odot p$), una distancia d

$$t = \frac{M_{fri}}{MTC} = \frac{p \cdot d}{MTC} \quad (\text{en cm.}) \quad t = \frac{p \cdot d}{MTC} \cdot \frac{1}{100} \quad (\text{en m.})$$

En este caso, si queremos que emerja la popa (trimado por proa), para que el efecto del trimado (a) compense el aumento de calado debido a la inmersión paralela (h), tendremos que mover el peso hacia proa.

Plantando la semejanza de los triángulos de las flotaciones obtenemos:

$$a = \frac{t}{L} \left(\frac{L}{2} - \overline{\Phi F} \right) = t \left(\frac{1}{2} - \frac{\overline{\Phi F}}{L} \right) \quad \text{y} \quad f = t - a \quad \text{o} \quad f = \frac{t}{L} \left(\frac{L}{2} + \overline{\Phi F} \right) = t \left(\frac{1}{2} + \frac{\overline{\Phi F}}{L} \right)$$

En este caso hemos supuesto que F está a popa de la sección media. Obviamente puede estar a proa, con lo que las expresiones de "a" y "f" cambian ligeramente.

c) Condición particular.- $T_{pp \text{ final}} = T_{pp \text{ inicial}} \Rightarrow a = h$

$$\left. \begin{aligned} a &= t \left(\frac{1}{2} - \frac{\overline{\Phi F}}{L} \right) \\ h &= \frac{P}{TCI} \\ t &= \frac{P \cdot d}{MTC} \end{aligned} \right\} \rightarrow a = h \Rightarrow \frac{P \cdot d}{MTC} \left(\frac{1}{2} - \frac{\overline{\Phi F}}{L} \right) = \frac{P}{TCI} \Rightarrow$$

$$\boxed{d = \overline{\Phi F} + \overline{\Phi f} = \frac{MTC}{TCI} \cdot \frac{L}{\frac{1}{2} - \overline{\Phi F}}}$$

Vemos que curiosamente "no depende" del peso ϕ .

d) Calados finales.- T_{ppf} y T_{prf} en metros

$$T_{ppf} = T_{ppi}$$

$$T_{prf} = T_{pri} + h + f = T_{pri} + \frac{P}{TCI} \cdot \frac{1}{100} + \frac{P \cdot d}{MTC} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{\left(\frac{L}{2} + \overline{\Phi F} \right)}{L}$$

La condición particular de este tipo de problemas puede ser cualquier otra, por ejemplo, que el calado en cualquier otro punto no cambie, o que valga un cierto valor, fijar un determinado trimado, etc.

2.- Varede:

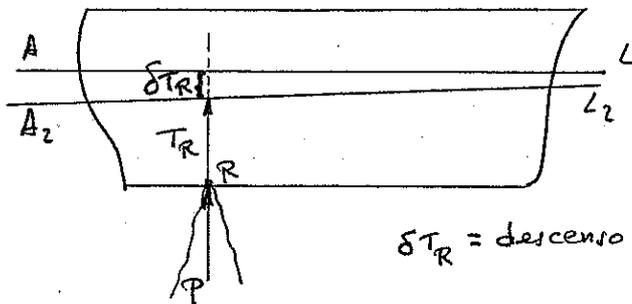
Suponemos que el buque entre en contacto con un accidente puntual del fondo, con el que puede pivotar libremente, y sin que se produzca ni la rotura del casco ni inundación.

Como ya se vio en estabilidad transversal, a efectos de cálculo, la reacción, sea grande o pequeña, la podemos tratar como si fuese la descarga de un peso del mismo

valor y con su c.d.p. en el punto de contacto.

En este estudio vamos a considerar que la reacción es relativamente pequeña, y para hacer el desarrollo matemático, que esté situada a popa del c.d.p. de la flotación (si estuviese a proa los razonamientos básicos son los mismos)

Como el peso se "quita" a popa, el barco adquirirá un trimado por proa.

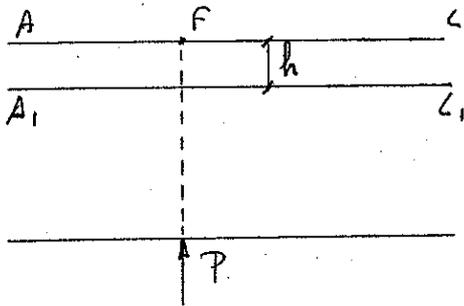


$\delta TR =$ descenso de la marea

$AL \rightarrow$ flotación inicial

$A_2L_2 \rightarrow$ flotación final

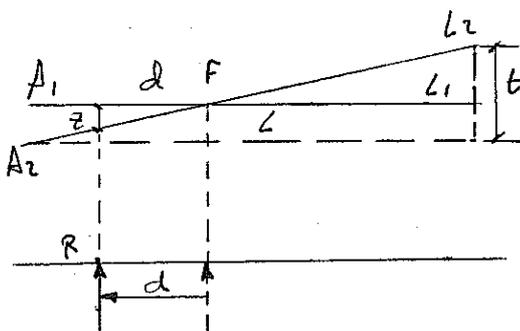
a) Emerción paralela (h).- La reacción P la suponemos aplicada en la perpendicular que pase por el punto F



De la flotación inicial AL pasamos a la flotación intermedia A_1L_1 , paralela a la anterior, a una distancia h

$$h = \frac{P}{TCI} \quad (\text{en cm.})$$

b) Cambio de trimado (t).- Traslado de la fuerza P desde la perpendicular del punto F hasta su posición real (que en este caso debe ser hacia popa, puesto que como hemos visto el trimado será por proa), una distancia d



El trimado por efecto del traslado será:

$$t = \frac{M_{tri}}{MTC} = \frac{P \cdot d}{MTC} \quad (\text{en cm.})$$

En la vertical del punto de contacto, R , la variación del calado debida a este trimado, z , será:

- Planteando la semejanza de triángulos $\frac{t}{L} = \frac{z}{d} \rightarrow$

$$z = t \cdot \frac{d}{L} = \frac{P \cdot d}{MTC} \cdot \frac{d}{L} \quad (\text{en cm.})$$

c) Condición particular.- La variación total del calado en el punto de contacto, δT_R , debe ser igual a lo que desciende la marea.

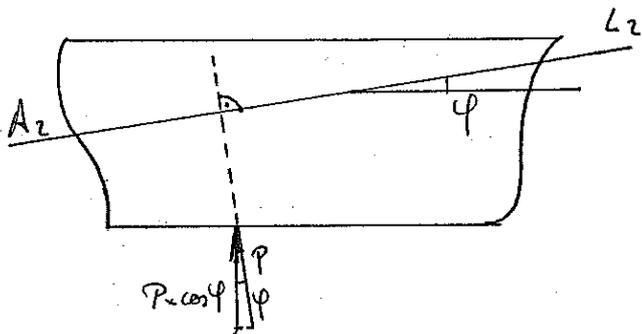
$$\delta T_R = T_{R \text{ final}} - T_{R \text{ inicial}} = \text{Descenso de la marea.}$$

A su vez, esta variación δT_R estará formada por la suma algebraica de h y z (emersión paralela y trimado con su signo)

$$\delta T_R = h + z = \frac{P}{TCI} + \frac{P \cdot d^2}{MTC \cdot L} \quad (\text{en cm.})$$

Con todas estas expresiones podemos calcular la reacción P y los nuevos calados o proa y popa de la forma habitual.

Note.- En la realidad, la reacción P no será perpendicular al plano base sino que será perpendicular a la flota.



pues hemos supuesto que es puntual y que el buque puede pivotar sobre ella. No obstante, en nuestro desarrollo, implícitamente estamos suponiendo que el ángulo de trimado es muy pequeño, por tanto $\cos \phi \approx 1 \Rightarrow$

$$P \cdot \cos \phi \approx P.$$

3.- Variación de los calados por cambio de densidad del agua.-

Hipótesis:

1º En este estudio suponemos que el estado general de los pesos del buque y su c.d.p. no varíe. Es decir que el desplazamiento total Δ es constante y que el punto G permanece fijo.

2º Por casos tradicionales que se presentan con el paso de mar a río, o viceversa. La densidad del agua de mar suele estar entre $1,025$ y $1,026 \text{ Tm/m}^3$, y la del agua dulce próxima a 1 Tm/m^3 . Por lo tanto, las variaciones de volumen que van a surgir no serán muy grandes, y su estudio lo podremos considerar con las mismas hipótesis simplificadoras que en la adición de pesos pequeños.

El planteamiento físico del problema es el siguiente:

- Al cambiar la densidad del agua en el que flota el buque, para un mismo desplazamiento, habrá una variación del volumen de carena, dV
- Al variar el volumen de carena, la posición del centro de carena también variará.
- Como el c.d.f. del buque hemos supuesto que no se altere, ambos centros dejan de estar alineados y aparecerá un par que modificará el asiento del barco.

Aquí vamos a analizar el paso de mar a río ($V_M \rightarrow V_R$). (El paso de río al mar se trata lo mismo).

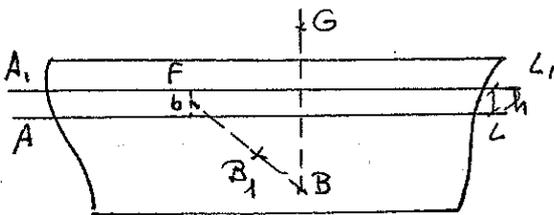
$$\Delta = cte = V_M \cdot \gamma_M = V_R \cdot \gamma_R \rightarrow V_R = V_M \cdot \frac{\gamma_M}{\gamma_R}$$

Como $\gamma_M > \gamma_R \rightarrow \frac{\gamma_M}{\gamma_R} > 1 \Rightarrow V_R > V_M \Rightarrow$ el buque se sumergirá

El aumento dV del volumen de carena será: $dV = V_R - V_M = V_M \cdot \frac{\gamma_M}{\gamma_R} - V_M \rightarrow$

$$dV = V_M \left(\frac{\gamma_M}{\gamma_R} - 1 \right)$$

a) Inmersión paralela.



Sea A, L la flotación inicial con c.d.c. en B , y A_1, L_1 la flotación final con c.d.c. en B_1 .

Debido al aumento de volumen, V , la variación de calado h que se produce entre ellas será

$$h = \frac{dV}{A_f} = \frac{V_R - V_M}{A_f}$$

El área de la flotación, A_f , nos la pueden dar como TCI. En este caso hay que tener cuidado pues $TCI = \frac{A_f \cdot \bar{v}_h}{100}$, siendo \bar{v}_h el utilizado en las curvas hidrostáticas.

Asimismo, cuando hablemos del trimado sobre la flotación auxiliar A_1, L_1 , los MTC que debemos utilizar son los correspondientes al medio sobre el que se encuentra, en este caso el río.

b) Nuevo centro de carena B_1

Al ser $d\sigma$ pequeño suponemos que el área de la flotación es constante en todo el intervalo de h . Por tanto el c. d. p. del volumen $d\sigma$, es decir F , estará en la misma vertical que el centro de la flotación F .

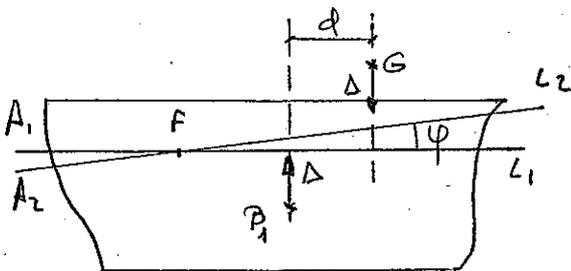
Para determinar la posición de B_1 tenemos que tomar momentos respecto de cualquier sección, nosotros vamos a tomar momentos respecto a la sección media.

	Volumen	brazo	Momento longitudinal "
Inicial	V_M	\overline{OB}	$V_M \cdot \overline{OB}$
Añadido	$d\sigma$	$\overline{OB} = \overline{OF}$	$d\sigma \cdot \overline{OF}$
Final	$V_R = V_M + d\sigma$	\overline{OB}_1	$V_M \cdot \overline{OB} + d\sigma \cdot \overline{OF}$

$$\overline{OB}_1 = \frac{V_M \cdot \overline{OB} + d\sigma \cdot \overline{OF}}{V_R}$$

c) Trimado y calados finales.

En este paso, el trimado no supone ya variación de volumen. Tras la inmersión paralela P_1 y G no están alineados, por lo que surgirá un momento de trimado.



$$M_{tri} = \Delta \cdot d = \Delta (\overline{OG} - \overline{OB}_1)$$

Si suponemos $\cos \phi \approx 1 \rightarrow \overline{OG} \approx \overline{OB} \rightarrow$

$M_{tri} = \Delta \cdot (\overline{OB} - \overline{OB}_1)$ y el trimado

$$t = \frac{M_{tri}}{MTC_R} = \frac{\Delta \cdot (\overline{OB} - \overline{OB}_1)}{MTC_R} = \frac{\Delta \cdot (\overline{OB} - \overline{OB}_1)}{MTC_R}$$

Si lo que conocemos es el MTC de mar, para conocer el MTC de río tendremos que hacer

$$MTC_R = MTC_M \cdot \frac{\gamma_R}{\gamma_M} \quad \text{ya que} \quad MTC = \frac{I_x \cdot \gamma}{100 \cdot L}$$

Conociendo la posición relativa entre B_1 y G sabremos si el trimado es por proa o por popa.

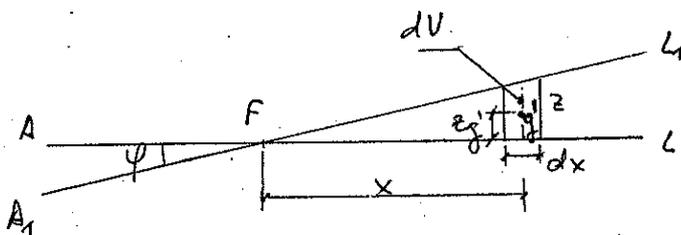
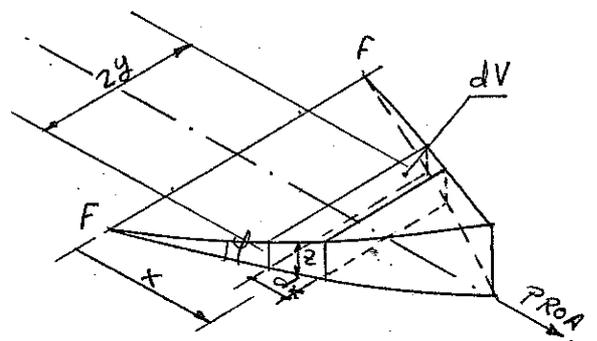
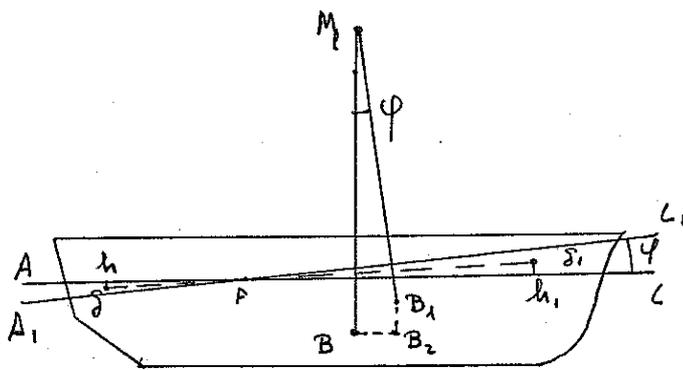
Planteando la semejanza de los triángulos de las flotaciones calculamos los valores de f y a .

Con los valores de " h ", " f " y " a " ya podemos conocer los calados finales.

$$\left. \begin{aligned} T_{pp\text{ final}} &= T_{pp\text{ inicial}} + h \pm f \\ T_{pp\text{ final}} &= T_{pp\text{ inicial}} + h \pm a \end{aligned} \right\}$$

Si el caso de estudio fuera el paso de río a mar, los razonamientos son los mismos, únicamente que el buque emerge y por tanto $dV < 0 \Rightarrow h < 0$.

Elevación del centro de empuje debido al cambio de trimado ($d\bar{k}_B$).



Sea AL la flotación admitida de un buque, con su c.d.c. en B ; y sea A_1L_1 una flotación con un determinado ángulo de trimado, φ , idónea de la anterior, y cuyo c.d.c. correspondiente es B_1 . Sean g y g_1 los c.d.p. de las ceñías que emerge y se sumerge, respectivamente, al pasar de la flotación AL a la A_1L_1 .

Por el momento de transferencia $v \cdot \overline{g g_1} = V \cdot \overline{B B_1}$

Por otro lado, $\overline{B B_1}$ lo podemos descomponer en una componente horizontal, $\overline{B B_2}$, y otra vertical $\overline{B_2 B_1}$. Como estamos estudiando la variación vertical

del c. d. c. debida a la acción del trimado, $d\overline{KB}$, sólo nos va a interesar la componente vertical ($d\overline{KB} = \overline{B_2B_1}$) del momento de transferencia.

$$v(\overline{p\overline{h}} + \overline{h_1\overline{p_1}}) = \nabla \cdot \overline{B_2B_1}$$

Como ya es habitual hacemos la descomposición $v(\overline{p\overline{h}} + \overline{h_1\overline{p_1}}) = v \cdot \overline{p\overline{h}} + v \cdot \overline{h_1\overline{p_1}}$, siendo $v \cdot \overline{p\overline{h}} = m_e$ y $v \cdot \overline{h_1\overline{p_1}} = m_s$ expresiones que coinciden con los momentos estáticos de las cuñas que emerge (m_e) y se sumerge (m_s) respecto del plano AL .

Para cada una de ellas:

$m = \int dm = \int z_p^1 \cdot dv$ siendo z_p^1 la altura del c. d. p. del elemento de cuña genérico dv , es decir, $z_p^1 = \frac{1}{2} z$. Además $dv = z \cdot dA$

$m = \int z_p^1 \cdot dv = \int \frac{1}{2} z \cdot z \cdot dA = \frac{1}{2} \int z^2 \cdot dA$ siendo $dA = zy \, dx$ si y es la semimanpa.

A su vez $z = x \cdot \operatorname{tg} \varphi$ que sustituido nos queda:

$$m = \frac{1}{2} \int z^2 \cdot dA = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot dA = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \int x^2 \cdot dA$$

Pero la expresión $x^2 \cdot dA$ coincide con el momento de inercia $dI = x^2 \cdot dA$.

$m = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \int dI$, y esto para cada cuña, es decir:

$$m_e + m_s = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \left[\int dI_e + \int dI_s \right] = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot I_F$$

siendo I_F , como ya sabemos, el momento de inercia de la flotación completa, adrizada, respecto del eje perpendicular a cruziá que pasa por el centro de la flotación F (eje FF)

$$\nabla \cdot \overline{B_2B_1} = m_e + m_s = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot I_F \rightarrow \overline{B_2B_1} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \frac{I_F}{\nabla} = d\overline{KB}$$

pero $\frac{I_F}{\nabla}$ es el radio metacéntrico longitudinal $\overline{BM}_e = \frac{I_F}{\nabla} \rightarrow$

$$\boxed{d\overline{KB} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \overline{BM}_e}$$

Esta corrección siempre es positiva ($d\bar{KB} > 0$) porque, si nos fijamos en el momento de transferencia de las cuñas de empuje, siempre existe una componente vertical respecto de su flotación irrocarena admitida, que es la que nos dan las curvas hidrostáticas, ya sea el trimado por proa o por popa (la concavidad siempre es hacia M_2).

En la mayoría de los casos el ángulo φ es lo suficientemente pequeño como para considerarlo un infinitésimo, por lo que $\text{tg}^2 \varphi$ será un infinitésimo de segundo orden, lo que hace que la corrección $d\bar{KB}$ sea despreciable. No obstante, la expresión de $d\bar{KB}$ que hemos obtenido es la que utiliza la Administración para las correcciones por trimado en algún supuesto de la experiencia de estabilidad.

Si queremos expresar la elevación del c.d.c. $d\bar{KB}$ en función de los MTC, sabemos que la fórmula aproximada es

$$MTC = \frac{\Delta \cdot \bar{BM}_1}{100L} \quad \rightarrow \quad \bar{BM}_2 = \frac{MTC \cdot 100L}{\Delta}$$

y que por otro lado $\text{tg} \varphi = \frac{t}{100L}$ (con t en centímetros)

Sustituyendo en la expresión anterior de $d\bar{KB}$

$$d\bar{KB} = \frac{1}{2} \text{tg}^2 \varphi \cdot \bar{BM}_2 = \frac{1}{2} \frac{t^2}{(100L)^2} \cdot \frac{MTC \cdot 100L}{\Delta} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{d\bar{KB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{100 \cdot L} \cdot \frac{MTC}{\Delta}}$$

Efecto del trimado sobre la estabilidad.

En general se puede decir que el efecto del trimado sobre la estabilidad es pequeño.

Como ya se ha comentado, las curvas hidrostáticas se calculan para flotaciones adrizadas, y los \bar{m} para los distintos ángulos de escora pero sin trimado, y son estos valores los que se utilizan para los cálculos de los \bar{G} aunque el buque tenga algo de trimado, y análogamente lo mismo se podría decir para los cálculos de \bar{G} .

Únicamente en los barcos pequeños, en los que el trimado tenga mayor influencia, se calculan estas curvas para dos o tres ángulos que sean representativos de las condiciones de carga previstas.

En cuanto al efecto del trimado sobre la altura metacéntrica, tanto transversal como longitudinal, si $\bar{G}M = \bar{m}B - \bar{K}G$, su variación vendrá dada por

$$d\bar{G}M = d\bar{m}B + d\bar{B}M - d\bar{K}G$$

• $d\bar{m}B$

Según hemos visto en el apartado anterior, la altura del c.d.c. siempre aumenta por efecto del trimado ($d\bar{m}B > 0$)

• $d\bar{B}M$

El radio metacéntrico es $\bar{B}M = \frac{I}{\nabla}$

- El volumen de carena ∇ no cambia por efecto del trimado, o incluso podemos considerar que varía muy poco en los casos en que se pasa de mar a río, o viceversa.

- El momento de inercia I que se ve influenciado por el trimado, ya que depende de las semimanpas ($I = f(y)$), y como los barcos suelen ser más finos por proa que por popa ($y_p < y_r$), cabe suponer que:

• Si el trimado es por popa, I aumenta $\Rightarrow d\bar{B}M > 0$

• Si el trimado es por proa, I disminuye $\Rightarrow d\bar{B}M < 0$

• $d\bar{K}G$

La variación del $\bar{K}G$ es el parámetro más manipulable pues depende de la distribución de pesos que hagamos a bordo. Si la variación de trimado se debe

a un traslado de pesos, y siempre que el metacentro lo podamos considerar fijo, especialmente el transversal, pues pudiera ocurrir que nos saliéramos de la zona de estabilidad inicial, la estabilidad aumentará si el peso se coloca de forma que el c.d.g. del buque baje ($d\bar{KG} < 0$), y disminuirá en caso contrario.

Según todo esto podemos concluir:

- 1.- Trimado por proa.- las variaciones de \bar{KB} y \bar{BM} tienen signos opuestos ($d\bar{KB} > 0$ y $d\bar{BM} < 0$). Si bien, en principio, no se puede asegurar cuál de los dos va a predominar, en la mayoría de los casos cabe suponer que \bar{KM} disminuye ($d\bar{KM} < 0$).
- 2.- Trimado por popa.- las variaciones de \bar{KB} y \bar{BM} tienen el mismo signo ($d\bar{KB} > 0$ y $d\bar{BM} > 0$), por tanto cabe suponer que \bar{KM} aumentará ($d\bar{KM} > 0$).

TEORÍA DEL BUQUE I

INUNDACIÓN

GENERALIDADES.-

La inundación es el fenómeno que se produce cuando el casco del buque pierde su estanqueidad, y esto hace que penetre el agua en su interior. Esto suele ocurrir por una avería que ha producido la rotura de las planchas del casco. Los motivos pueden ser varios (abordaje, explosión, varada, etc.)

Los efectos de la inundación son:

- ◆ Aumento de calado.
- ◆ Modificación del trimado.
- ◆ Modificación de la escora.
- ◆ Variación de la estabilidad.

La consecuencia extrema que puede producir la inundación es el hundimiento del buque, el cual puede producirse por dos causas:

- ◆ Por falta de estabilidad (zozobra). Es un proceso muy rápido, de escasos minutos que no da tiempo a reaccionar para evacuar el buque.
- ◆ Por la pérdida o agotamiento de su reserva de empuje (obra muerta). Este es un proceso que suele ser muy lento, pueden ser horas.

En la oficina de proyectos, para disminuir los efectos de la inundación, lo que se hace es subdividir el casco en una serie de compartimientos estancos por medio de mamparos transversales. Con estos mamparos lo que se pretende es limitar la posible entrada de agua, de manera que la flotación final tenga un calado y un asiento tales que los extremos superiores de los mamparos no queden sumergidos. Con esto se consigue disminuir la pérdida de área de la flotación y de *GM*.

El número y condiciones de estos mamparos estancos viene definido por el Reglamento de Esloras Inundables, y se pueden determinar mediante una serie de cálculos específicos. El número de estos mamparos debe ser el justo, ya que si son demasiados el buque va a resultar más caro de construir y, durante la explotación, la carga más difícil de manejar y de estibar.

CLASES DE INUNDACIÓN Y TRATAMIENTO DEL CÁLCULO.-

Cuando se produce una avería en el forro que haga que el interior del casco se ponga en contacto con la mar, puede ocurrir que entre el agua hasta que el compartimiento se llene por completo o hasta que alcance el nivel exterior de la mar.

- 1.- Si el compartimiento queda completamente lleno: Se trata como si fuese un sólido (adición de pesos).
- 2.- Si el compartimiento queda parcialmente lleno: En este caso va a aparecer una superficie libre, y cabe distinguir a su vez otros dos supuestos:
 - 2.1.- El compartimiento inundado permanece en libre comunicación con la mar, que es el caso que vamos a estudiar en detalle.
 - 2.2.- Cuando el agua ha alcanzado un cierto nivel intermedio cesa la comunicación, es decir, no hay escape de aire, quedando como un cierto colchón en su interior. El tratamiento, a efectos de cálculo, sería considerarlo como una adición de pesos más la superficie libre.

Como vemos, a fin de cuentas, la inundación siempre se podría considerar como un caso muy particular de la adición de pesos.

MÉTODOS DE CÁLCULO DE LOS EFECTOS DE LA INUNDACIÓN EN LIBRE COMUNICACIÓN.-

Tradicionalmente existen dos procedimientos de estudio de este tipo de inundación: El de pérdida de empuje y el del peso añadido.

a) Pérdida de empuje.-

Este método considera que el agua embarcada, al ser mar, no produce empuje, es decir, el peso del agua que entra compensa exactamente el empuje que produce. Dicho más gráficamente, "la zona inundada deja de ser barco".

Como el peso propio del buque (desplazamiento) y su centro de gravedad no se alteran, el buque tiene que aumentar su calado para recuperar su pérdida empuje, y, aunque el volumen final "sano" resultante tendrá que ser igual al inicial, lo cierto es que al modificar su geometría el centro de carena se alterará, sobre todo verticalmente. En resumen podemos decir:

- 1.- El desplazamiento (peso) permanece constante.
- 2.- El volumen de carena mantiene su valor absoluto, pero modifica su forma.
- 3.- Cambian los calados.
- 4.- El centro de gravedad del buque permanece fijo.
- 5.- El centro de carena cambia de posición.
- 6.- Los metacentros transversal y longitudinal se modifican.

b) Peso añadido.-

En este caso se considera que el agua embarcada va a formar parte del desplazamiento del buque, con todas sus consecuencias:

- 1.- El desplazamiento (peso) aumentará.
- 2.- El volumen de carena también aumentará en consecuencia.
- 3.- Cambian los calados.
- 4.- El centro de gravedad modifica su posición.

- 5.- El centro de carena también.
- 6.- Los metacentros transversal y longitudinal se modifican.

Efectos de la inundación.-

En todo lo que sigue, el apartado *a)* se refiere al método de pérdida de empuje y el apartado *b)* al método del peso añadido.

1.- Cambio de calado:

Al aumentar el calado se va a reducir el francobordo, por lo que aumentará la posibilidad de hundimiento por falta de empuje. Para calcularlo:

- a)* El desplazamiento de la parte intacta debe ser igual al peso del buque antes de la inundación.
- b)* Para que el empuje del nuevo volumen final sumergido compense al peso inicial más el del agua embarcada.

2.- Cambio de trimado:

a) Hasta que el centro de carena de la parte sin inundar se sitúe en el plano transversal que pase por el centro de gravedad del buque antes de la inundación y sea normal a la flotación de equilibrio final.

b) Hasta que el centro de carena de todo el volumen final sumergido se sitúe en el plano transversal que pase por el nuevo centro de gravedad (buque más agua embarcada) y sea normal a la nueva flotación de equilibrio.

3.- Escora:

Si los compartimientos inundados fuesen asimétricos respecto a crujía o si la altura metacéntrica resultante fuese negativa, aunque sean simétricos, el buque escorará hasta que los centros de gravedad y de carena vuelvan a quedar alineados en una vertical al nuevo plano de la flotación y en situación de equilibrio estable.

La consecuencia de la escora es que va a reducir el francobordo, y si la cubierta de mamparos quedara, aunque sólo sea en parte, por debajo del nivel del mar, el agua entraría en los compartimientos intactos y podría originar una inundación progresiva.

4.- Modificación de la estabilidad transversal y longitudinal:

$$GM = KB + BM - KG$$

KB.- Siempre va a aumentar, tanto por aumentar el calado como, en menor medida, por efecto del trimado.

BM.- No se puede asegurar que siempre vaya a aumentar o a disminuir, pues por un lado disminuirá al ser menor el área de la flotación (método de pérdida de empuje), pero por otro aumentará, pues al aumentar el calado, las semimangas aumentan.

KG.- En el método de pérdida de empuje no cambia. En el del peso añadido pudiera ocurrir que bajase si el centro de gravedad del agua embarcada esta por debajo del centro de gravedad original.

Superficies libres.- En el método del peso añadido va a aparecer este fenómeno que hace disminuir la estabilidad.

Conclusión.- A priori no se puede afirmar que *GM* siempre vaya a disminuir, hay que hacer los cálculos concretos en cada caso. Lo mismo se puede decir de los pares adrizantes o de la estabilidad dinámica.

Recomendaciones.-

Método de la pérdida de empuje:

- ◆ Cuando el compartimiento inundado está en libre comunicación con la mar, ya que el número de variables a considerar es mucho menor.
- ◆ Para conocer la situación final del buque después de la inundación.

Método del peso añadido:

- ◆ Para calcular la estabilidad del buque durante la inundación. Pudiera ocurrir que el buque en la situación teórica final fuese estable, pero durante el proceso de inundación no.
- ◆ Cuando el compartimiento queda totalmente inundado.

Permeabilidad.-

Se entiende por permeabilidad volumétrica la cantidad de agua con que se puede llenar un compartimiento, en un momento dado, expresada como fracción o tanto por ciento del volumen total. Así, por ejemplo: Un compartimiento vacío con un 2% de estructuras tendría una permeabilidad del 98%. Un tanque de lastre del doble fondo que inicialmente estuviese totalmente lleno tendría una permeabilidad del 0%.

Obviamente en la fase de diseño no se puede conocer la permeabilidad exacta que tendrá un compartimiento en un momento dado, por lo que para el cálculo de las esloras inundables se utiliza una permeabilidad media, para ello se consideran tres zonas:

- a) Zona de máquinas y calderas.
- b) Compartimientos situados a proa de la cámara de máquinas y calderas.
- c) Compartimientos situados a popa de la cámara de máquinas y calderas.

Para cada una de estas zonas se determina la permeabilidad por medio de una fórmula.

Existe también otra permeabilidad que es la permeabilidad de las superficies, que se utiliza para determinar los momentos de inercia por el método de pérdida de empuje, pues el agua no ocupará toda la superficie del compartimiento. No se utiliza nada más que para calcular la pérdida de GM , y debe calcularse para cada caso concreto.

INUNDACIÓN

(3)

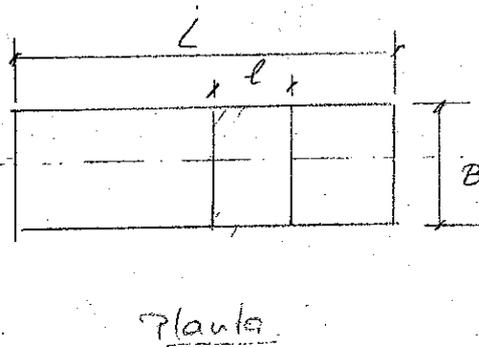
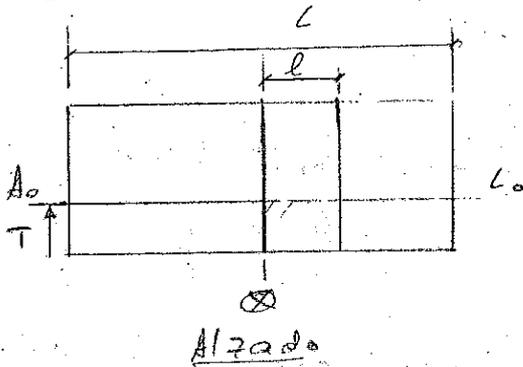
VARIACIÓN DEL CALADO Y DEL TRINADO COMO CONSECUENCIA DE UNA INUNDACIÓN DE EFECTOS RELATIVAMENTE PEQUEÑOS EN UNA BATEA DE COSTADOS VERTICALES Y FONDO PLANO

Sea una batea de forma paralelepédica inicialmente adrizada y en equilibrio a la que se le inunda un compartimiento de longitud "l" que se extiende de banda a banda en el sentido de la marpa y cuyo manopero de popa está en la sección media.

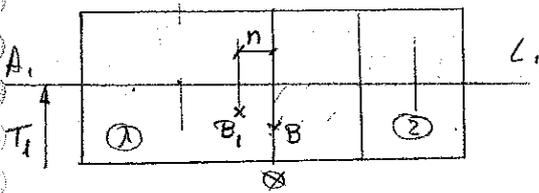
a) Método de pérdida de empuje

1- Inmersión paralela $A_0 L_0 \rightarrow A_1 l_1 \Rightarrow \begin{cases} T \rightarrow T_1 \\ B \rightarrow B_1 \\ G \rightarrow \text{no cambia} \end{cases}$

Situación inicial:



- Inmersión paralela



1.1. (T_1)

$$\Delta = cte \Rightarrow \nabla_{inicial} = \nabla_{final} \rightarrow$$

$$L B T = B T_1 (L-l) \rightarrow T_1 = T \frac{L}{L-l}$$

1.2. (B_1) Tomando momentos respecto a \otimes

Mom. total resultante $\otimes = \sum$ mom. partes resultantes \otimes

$$\nabla_1 \cdot n = v_1 \cdot (-d_1) + v_2 \cdot d_2 \rightarrow B T_1 (L-l) \cdot n = \left[\frac{L}{2} B T_1 \right] \left[-\frac{L}{4} \right] + B T_1 \left(\frac{L-l}{2} \right) \cdot \left[l + \frac{\frac{L-l}{2}}{2} \right] \rightarrow$$

$$n = \frac{-\frac{L^2}{8} + \frac{L-l}{2} \left[l + \frac{L-l}{4} - \frac{l}{2} \right]}{L-l} = \frac{-\frac{L^2}{8} + \frac{L-l}{2} \cdot \frac{L+l}{4}}{L-l} = \frac{-\frac{L^2}{8} + \frac{(L-l)(L+l)}{8}}{L-l} = \frac{-L^2 + L^2 - 4l^2}{8(L-l)}$$

$$n = -\frac{l^2}{2(L-l)}$$

- Veamos lo mismo por otro camino.

1.1. (T_1)

Empuje perdido = empuje ganado por "dT"

$$\text{Empuje perdido} = lBT$$

$$\text{Empuje ganado} = (L-l) \cdot B \cdot dT$$

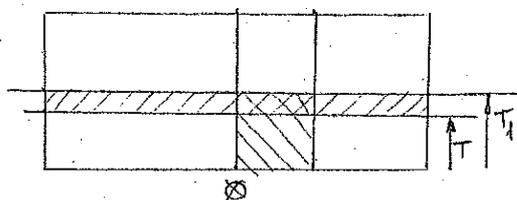
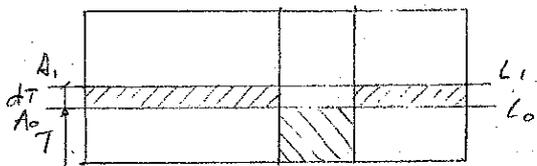
$$lBT = (L-l)B \cdot dT \rightarrow dT = T \frac{l}{L-l}$$

$$T_1 = T + dT = T + T \frac{l}{L-l} = T \left(1 + \frac{l}{L-l} \right) \rightarrow T_1 = T \frac{L}{L-l}$$

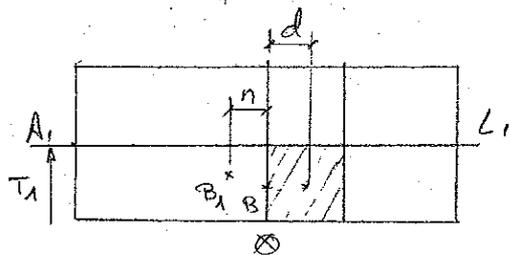
- Una variante de este camino sería:

$$\text{volumen } \text{▨} = \text{volumen } \text{▩} \rightarrow$$

el volumen ▩ contendría en los dos miembros de la igualdad.



1.2 (B_1)



Tomando momentos de los distintos volúmenes correspondientes a la flotación A_1, L_1 respecto a $\otimes \rightarrow$

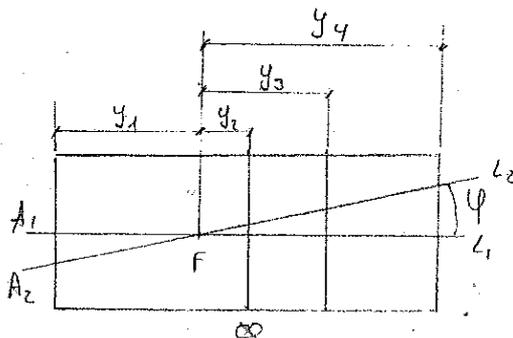
Mom. final resultante $\otimes = \text{Mom. completo } \otimes - \text{Mom. vol. que desaparece } \otimes$

$$BT_1(L-l) \cdot n = BLT_1 \cdot 0 - v \cdot d \left| \rightarrow BT_1(L-l) \cdot n = -BT_1 \frac{l^2}{2} \rightarrow n = \frac{l^2}{2(L-l)} \right|$$

$$v = lBT_1$$

$$d = l/2$$

2.- Trimado. El c.d.p. G no cambia mientras que el c.d.c. sí $(B \rightarrow B_1) \Rightarrow$ momento de trimado.



2.1. Teorema de Euler. - Suponiendo que la flotación final A_2L_2 no "moja" la cubierta, el eje de giro, intersección de A_1L_1 y A_2L_2 , para por F (c.d.p. de la flotación resultante después de quitarle el área de la zona inundada)

INUNDACIÓN

$\Delta = cte \Rightarrow V = cte \Rightarrow$ volumen cuña emergente = vol cuña sumerge

Si además φ es pequeño (en este caso no es necesario basta con que $A_2 L_2$ no "moje" la cubierta).

$$V_e = A_{triáng.} \cdot B = \frac{1}{2} y_1 \cdot y_1 \cdot \varphi \cdot B \approx \frac{1}{2} y_1^2 \varphi B$$

$$V_s = \text{vol}(y_4) - \text{vol}(y_3) + \text{vol}(y_2) \rightarrow V_s = \frac{1}{2} y_4^2 \varphi B - \frac{1}{2} y_3^2 \varphi B + \frac{1}{2} y_2^2 \varphi B$$

$$\frac{1}{2} y_1^2 \varphi B = \frac{1}{2} y_4^2 \varphi B - \frac{1}{2} y_3^2 \varphi B + \frac{1}{2} y_2^2 \varphi B$$

Cada uno de los sumandos de esta igualdad está formado por la expresión $B \cdot y_i \cdot \frac{1}{2} y_i = A_i \cdot d_i$, donde $A_i = B \cdot y_i$ el área de cada elemento, y $d_i = \frac{1}{2} y_i$ la distancia de su c.d.g. respecto a F, es decir su momento estático. Por tanto:

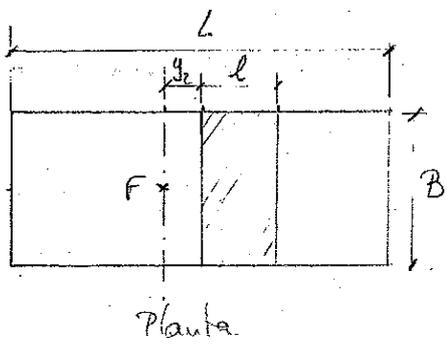
$\frac{1}{2} y_1^2 B =$ momento estático de la parte emergente de la flotación resultante respecto del eje F

$\frac{1}{2} y_4^2 B - \frac{1}{2} y_3^2 B + \frac{1}{2} y_2^2 B =$ lo mismo de la parte que se sumerge

La igualdad de momentos estáticos, al no tener zonas comunes, implica que estamos tomando momentos respecto de un eje que pasa por el c.d.g. de la flotación total resultante (F).

2.2. Posición de $\bar{F} = y_2$

En este caso particular F y B_1 están en la misma vertical $\rightarrow y_2 = 0$.



Tomando momentos respecto \otimes

Mom total $\otimes = \sum \text{mom. partes} \otimes \rightarrow A_i \cdot d_i = \sum A_i \cdot d_i$

Mom. total $\otimes = A_i \cdot d_i = B \cdot \underbrace{(L-l)}_{A_i} \cdot y_2$

Mom. partes $\otimes \rightarrow$ Mom. Proa $\otimes = A_1 \cdot d_1 = \frac{L}{2} \cdot B \cdot \left(-\frac{L}{4}\right)$

Mom. Proa $\otimes = A_2 \cdot d_2 = B \cdot \left(\frac{L}{2} - l\right) \cdot \left(\frac{\frac{L}{2} - l}{2} + l\right)$

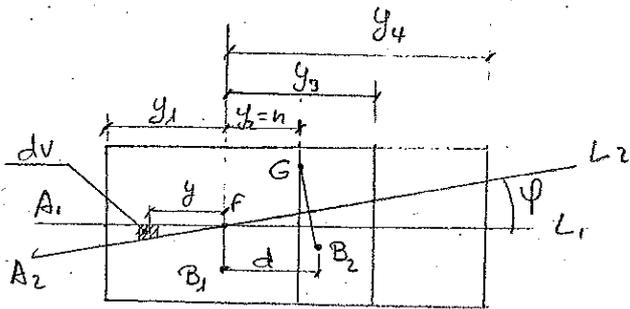
Igualando

$$B(L-l) \cdot y_2 = -B \frac{L^2}{8} + B \frac{L-2l}{2} \left[\frac{L}{4} - \frac{l}{2} + l \right] \rightarrow$$

$$y_2 = \frac{\frac{L-2l}{2} \left[\frac{L-2l+4l}{4} \right] - \frac{L^2}{8}}{L-l} = \frac{(L-2l)(L+2l)}{8(L-l)} - \frac{L^2}{8} = \frac{L^2 - 4l^2 - L^2}{8(L-l)} \rightarrow$$

$$y_2 = -\frac{l^2}{2(L-l)} = n$$

2.3. Radio metacéntrico ($B_1 \rightarrow B_2$)



a) Debido al per de trimado, Δ n habrá una transferencia de empuje de una cuña a otra.

Como ya sabemos el momento de transferencia se traduce en:

$$\text{mom. cuña emersa} + \text{mom. cuña sumergida} = \overline{B_1 B_2} \cdot \nabla$$

$$m_e = \int_0^{y_1} y \cdot dv \rightarrow dv = z \cdot dy \cdot B \rightarrow z = y + y \cdot \phi \approx y \cdot \phi \rightarrow dv = y \cdot \phi \cdot B \cdot dy \rightarrow$$

$$m_e = \int_0^{y_1} y \cdot y \cdot \phi \cdot B \cdot dy = \int_0^{y_1} y^2 B \phi dy \quad \text{Análogamente}$$

$$m_s = \int_0^{y_2} B \phi y^2 dy + \int_{y_3}^{y_4} B \phi y^2 dy \quad \text{Por tanto}$$

$$\overline{B_1 B_2} \cdot \nabla = m_1 + m_2 = \phi \left[\int_0^{y_1} B y^2 dy + \int_0^{y_2} B y^2 dy + \int_{y_3}^{y_4} B y^2 dy \right]$$

$$\text{Pero } B \cdot dy = dA \rightarrow \text{cada integral} \rightarrow \int y^2 \cdot dA = \int dI \Rightarrow$$

$$\overline{B_1 B_2} \cdot \nabla = \phi \cdot I_F$$

b) Por otro lado al ser el metacentro longitudinal M_2 el centro de curvatura del arco $\overline{B_1 B_2} \rightarrow \overline{B_1 B_2} = \overline{B M_2} \cdot \phi$

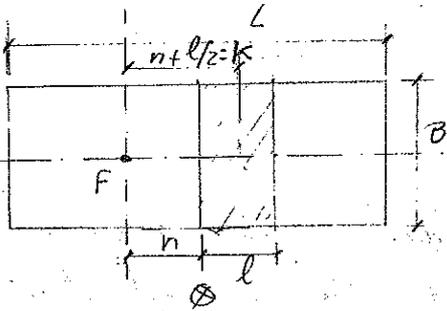
c) Aproximando el arco a la cuerda y la tangente $\overline{B_1 B_2} \approx \overline{B_1 B_2}$ y sustituyendo

$$\overline{B_1 B_2} \cdot \nabla = \phi \cdot I_F \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \overline{B M_2} \cdot \phi \cdot \nabla = I_F \cdot \phi \\ \rightarrow \overline{B_1 B_2} = \overline{B M_2} \cdot \phi \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\overline{B M_2} = \frac{I_F}{\nabla}}$$

etc...

INUNDACION

2.4. I_F



I_F = momento de inercia de la flotación resultante respecto de F

flotación resultante = A - S siendo:

$$k = n + l/2$$

$$A = B \cdot L \text{ (área total)}$$

$$S = B \cdot l \text{ (área desahogada)}$$

$$I_F \equiv I_F(A-S) = I_F(A) - I_F(S)$$

• $I_F(A) \rightarrow$ Por Steiner $\rightarrow I_F(A) = I_{\otimes} + n^2 \cdot A = \frac{1}{12} B L^3 + n^2 B \cdot L$

• $I_F(S) \rightarrow$ Por Steiner $\rightarrow I_F(S) = i + k^2 \cdot S = \frac{1}{12} B l^3 + \left(n + \frac{l}{2}\right)^2 \cdot B \cdot l$

• $I_F = I_F(A) - I_F(S) \rightarrow \boxed{I_F = I_{\otimes} + n^2 A - i - k^2 S}$ (1)
(para futuros cálculos)

2.5. Trimado t

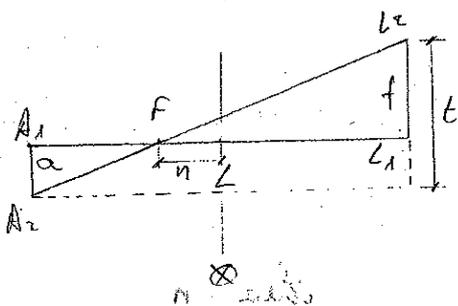
Recordando la definición de MTC \rightarrow Momento de trimado $\rightarrow M_{tr} = \Delta \cdot n$

además $M_{tr} = \Delta \cdot \overline{GM}_e \cdot \tan \varphi = \Delta \cdot \overline{GM}_e \cdot \frac{t}{L} \rightarrow t = \frac{M_{tr} \cdot L}{\Delta \cdot \overline{GM}_e} = \frac{\Delta \cdot n \cdot L}{\Delta \cdot \overline{GM}_e} = \frac{nL}{\overline{GM}_e}$

Si análogamente hacemos la aproximación $\overline{GM}_e \approx \overline{BM}_e \rightarrow$

$$\boxed{t = \frac{nL}{\overline{BM}_e}} \quad \text{con} \quad \overline{BM}_e = \frac{I_F}{\nabla}$$

Una vez conocido t planteamos los triángulos.



$$\frac{t}{L} = \frac{f}{\frac{L}{2} + n} \quad \text{y} \quad \frac{t}{L} = \frac{a}{\frac{L}{2} - n} \Rightarrow$$

Cambio de calado a proa $\rightarrow f = t \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{L} \right)$

Cambio de calado a popa $\rightarrow a = t \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{L} \right)$

b) Método del peso añadido.

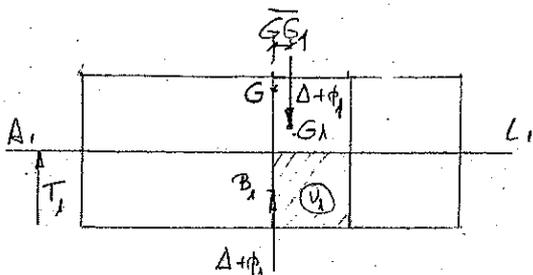
1.- Inmersión paralela

Flotación: $A_0 L_0 \xrightarrow[\text{a}]{\text{para}} A_1 L_1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T \rightarrow T_1 \\ B \rightarrow B_1 \\ G \rightarrow G_1 \end{array} \right\}$

1.1. T_1

En esta primera fase, el peso añadido, φ_1 , es el peso del agua "embarcada" hasta la flotación $A_1 L_1$, es decir, el volumen del compartimiento, V_1 , hasta el calado T_1 , correspondiente a la flotación $A_1 L_1$, por el peso específico del agua

$$\varphi_1 = V_1 \cdot \gamma = l B T_1 \cdot \gamma$$



Peso final = peso inicial + peso añadido

Peso final $\rightarrow \Delta_1 = l B T_1 \cdot \gamma$

Peso inicial $\rightarrow \Delta = l B T \cdot \gamma$

Peso añadido $\rightarrow \varphi_1 = l B T_1 \cdot \gamma$

$$l B T_1 \cdot \gamma = l B T \cdot \gamma + l B T_1 \cdot \gamma \rightarrow T_1 (l B \gamma - l B \gamma) = l B T \cdot \gamma \rightarrow$$

$$\boxed{T_1 = \frac{T \cdot L}{L - l}}$$

Expresión que coincide con la del método anterior.

1.2 B_1

Al ser la flotación $A_1 L_1$ aditada, el c.d.c. B_1 estará en el plano de simetría, es decir en \otimes , aunque tubiere algo

$$\boxed{\otimes B_1 = 0}$$

1.3. G_1

Tomando momentos respecto a $\otimes \rightarrow \text{Mom. total } \otimes = \sum \text{mom. } \otimes$

$$\Delta_1 \cdot \overline{GG_1} = \Delta \cdot 0 + \varphi_1 \cdot \frac{l}{2}$$

Ya que el c.d.p. inicial, G , por partir de una situación de equilibrio, está en la misma vertical que el c.d.c. B , es decir \otimes

INUNDACION

Como $\rho_1 = V_1 \cdot \gamma = LB T_1 \cdot \gamma$ y $\Delta_1 = LB T_1 \cdot \gamma \rightarrow$

$$\Delta_1 \cdot \overline{GG}_1 = \rho_1 \cdot \frac{l}{2} \rightarrow LB T_1 \gamma \cdot \overline{GG}_1 = LB T_1 \gamma \cdot \frac{l}{2} \rightarrow \boxed{\overline{GG}_1 = \frac{l^2}{2L}}$$

2- Efecto de libre comunicaci3n

Al no quedar alineados el c.d.p (G_1) y el c.d.c (B_1) actuar3 un momento de trimado $\rightarrow M_L = (\Delta + \rho_1) \overline{GG}_1$. Este momento siempre har3 que el flotador gire en la direcci3n del volumen que se inunda \rightarrow lo que producir3 que embarque un volumen de agua adicional, V_2 , hasta alcanzar la flotaci3n final y definitiva de equilibrio $A_2 L_2$. Este fen3meno, que se conoce como libre comunicaci3n, hace que al embarcar m3s agua y a3adir un peso extra $\rho_2 = V_2 \cdot \gamma$, necesitamos un incremento de empuje.

$A_2 L_2 \rightarrow$ flotaci3n final definitiva de equilibrio

(F) \rightarrow punto de corte $A_2 L_2$ y $A_1 L_1$, ahora no es el c.d.p. de $A_1 L_1$

$O_1 \rightarrow$ c.d.p. de la flotaci3n $A_1 L_1$ (anteri3r)

$A_3 L_3 \rightarrow$ flotaci3n auxiliar paralela a $A_2 L_2$ y que pasa por $O_1 \Rightarrow$ isocarea a $A_1 L_1$

(V_2)

La superficie libre final de $V_1 + V_2$ coincidir3 con $A_2 L_2$. Sin embargo, para calcular V_2 suponemos la superficie libre adriada "ce". El punto b tiene su c.d.p. que por ser el compartimiento de costados verticales coincidir3 con la intersecci3n de $A_2 L_2$ con el eje de simetr3a

$$\rho_2 = V_2 \cdot \gamma$$

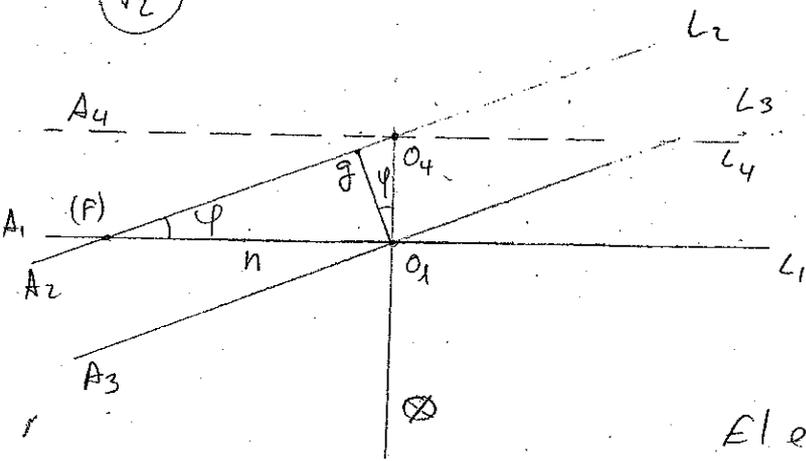
$$V_2 = \overline{ab} \times \overline{ce} \times B = \overline{ab} \cdot l \cdot B \rightarrow \overline{ab} = k \cdot \tan \varphi \approx k \cdot \varphi \rightarrow V_2 = k \cdot \varphi \cdot l \cdot B \rightarrow$$

$$S = B \cdot l \rightarrow V_2 = k \cdot \varphi \cdot S$$

Para compensar este peso ρ_2 se tiene que producir un aumento de empuje. $V_2 \cdot \gamma$

$$\rightarrow \rho_2 = \gamma V_2 = \gamma V_2$$

• (V_2)



La flotación A_2L_2 es la flotación definitiva.

La flotación A_3L_3 es una flotación auxiliar, paralela a A_2L_2 y que pasa por O_1 (c.d.p. de A_1L_1) \rightarrow isocarena con A_1L_1 \Rightarrow

El empuje añadido sera $V_2 \cdot \gamma$
Siendo V_2 el volumen comprendido entre las

flotaciones A_2L_2 y A_3L_3

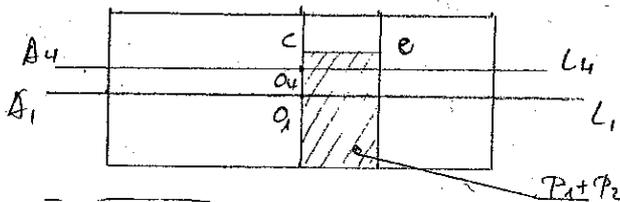
$$V_2 = A_{A_2L_2} \cdot \overline{O_1O_4} = A_{A_2L_2} \cdot \overline{O_1O_4} \cdot \cos \varphi \rightarrow A_{A_2L_2} \cdot \cos \varphi = A$$

Siendo $A = B \cdot l = \text{Area de la flotación } A_1L_1 \rightarrow V_2 = A \cdot \overline{O_1O_4}$

$$\overline{O_1O_4} = n \cdot \tan \varphi \approx n \cdot \varphi \rightarrow V_2 = \underline{\underline{A \cdot n \cdot \varphi}}$$

Esto también lo podríamos haber visto trazando la flotación auxiliar A_4L_4 , isocarena de A_2L_2

$$V_2 = A \cdot \overline{O_1O_4} \rightarrow \overline{O_1O_4} = n \cdot \varphi \rightarrow V_2 = A \cdot n \cdot \varphi$$



• (n) \rightarrow Punto de corte A_1L_1 y A_2L_2 .

Igualando el peso añadido $p_2 = \gamma V_2$ con el incremento de empuje $\gamma V_2 \rightarrow \gamma V_2 = \gamma V_2$

$$\rightarrow k \cdot S = A \cdot n \cdot \varphi \rightarrow \boxed{k \cdot S = A \cdot n} \quad (2) \rightarrow$$

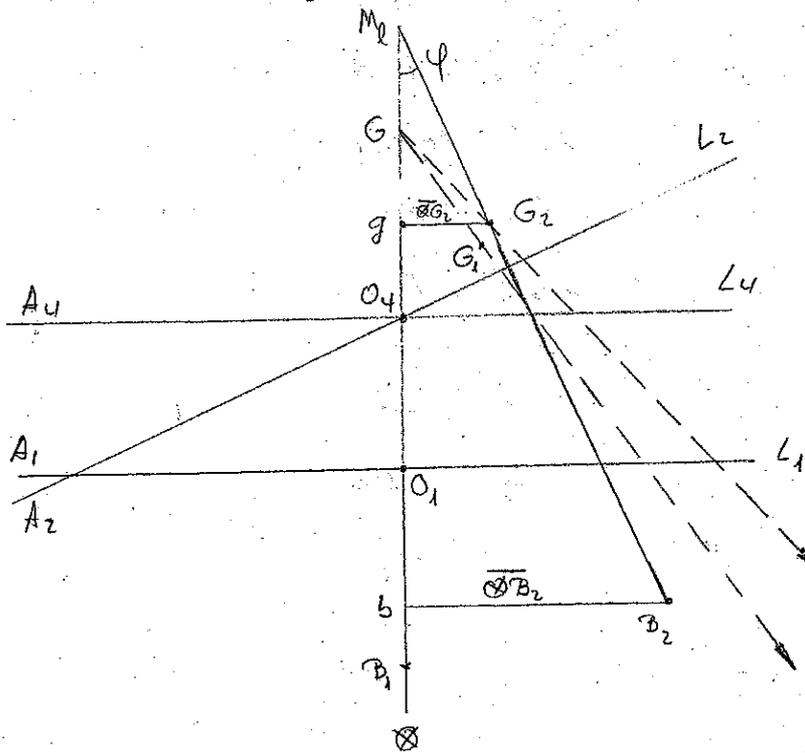
Como $k = n + d = n + \frac{l}{2} \rightarrow (n + \frac{l}{2}) \cdot S = A \cdot n \rightarrow S \cdot \frac{l}{2} = n(A - S) \rightarrow \left. \begin{matrix} A = B \cdot L \\ S = B \cdot l \end{matrix} \right\} \rightarrow$

$$B \cdot l \cdot \frac{l}{2} = n \cdot B \cdot (L - l) \rightarrow \boxed{n = \frac{l^2}{2(L-l)}}$$

Así se ve que el punto de corte (F) de la flotación definitiva (A_2L_2) con la auxiliar A_1L_1 , es el mismo que por el método de pérdida de empuje.

INUNDACION.

3.- Trimado y superficies libres.



$G \rightarrow$ c.d.p. inicial
 $G_2 \rightarrow$ c.d.p. final definitivo
 $B_2 \rightarrow$ c.d.c. final definitivo
 (flotación $A_2 L_2$)

Al c.d.p. final de $\phi_1 + \phi_2$ + efecto de superficies libres.
 Al c.d.p. de ϕ_1

3.1. Trimado it

Si B_2 es el c.d.c. final correspondiente a la flotación $A_2 L_2$ y G_2 es el c.d.p. final, para que la balsa esté en equilibrio B_2 y G_2 deben estar alineados en la misma perpendicular a $A_2 L_2$.

La intersección de esta recta con la que pasa por B_1 y G , perpendicular a $A_1 L_1$ nos va a dar el metacentro longitudinal M_2 .

Tenemos dos triángulos semejantes $\triangle G_2 M_2$ y $\triangle B_2 M_2 \rightarrow$

$$\frac{\overline{G_2 M_2}}{\overline{G_2 M_2}} = \frac{\overline{B_2 M_2}}{\overline{B_2 M_2}} = \operatorname{tg} \phi = \frac{t}{L}$$

En general, como el ángulo ϕ estamos suponiendo que es muy pequeño, podemos aproximar

$$\cos \phi \approx 1 \rightarrow \overline{G_2 M_2} = \overline{G_2 M_2} \approx \overline{B_2 M_2} = \overline{B_2 M_2} \rightarrow \boxed{\overline{G_2 M_2} \approx \overline{B_2 M_2}}$$

3.2. Componente horizontal del c.d.p. \bar{OG}_2

$$\Delta_{\text{final}} \times \bar{OG}_2 = \Sigma m \cdot d$$

La componente horizontal de G_2 , \bar{OG}_2 , viene determinada por tres momentos

0° El momento inicial (Δ) respecto a O es cero.

1° Entrada de agua hasta $A_1L_1 \rightarrow m_1 = v_1 \cdot \gamma \cdot d$ con $d = l/2$

2° Entrada de agua desde A_1L_1 hasta A_2L_2 por efecto de libre comunicación $\rightarrow m_2 = v_2 \cdot \gamma \cdot d \rightarrow$ por (2) $\rightarrow m_2 = A \cdot n \cdot \varphi \cdot \gamma \cdot d$

3° El debido a la corrección por la superficie libre, es decir el debido al movimiento de las cuñas en el compartimiento inundado para cambiar la superficie libre desde admitido hasta $A_2L_2 \rightarrow m_3 = i \cdot \gamma \cdot \varphi$

Por tanto la componente horizontal de $G_2 \rightarrow \bar{OG}_2$ será

$$\bar{OG}_2 \cdot \Delta_{\text{final}} = \bar{OG}_2 \cdot (\Delta + \gamma (v_1 + v_2)) = m_1 + m_2 + m_3$$

3.3. Componente horizontal del c.d.c. \bar{OB}_2

A efectos de cálculo podemos suponer que el c.d.c. se ve afectado por:

1° Movimiento vertical desde B hasta B_1 , que no influye en la componente horizontal $\rightarrow v_1$

2° Inmersión paralela desde A_1L_1 hasta $A_4L_4 \rightarrow$ lo que nos permite conocer el volumen de carena final $\rightarrow V_{\text{fin}} = V + v_1 + v_2$

3° Giro alrededor de $O_4 \rightarrow$ la flotación A_4L_4 para o $A_2L_2 \rightarrow$

$$\bar{OB}_2 \cdot (V + v_1 + v_2) = I_4 \cdot \varphi = I_O \cdot \varphi \quad \text{con} \quad I_O = \frac{1}{12} BL^3$$

3.4. Trimado t

• \bar{OG}_2

$$\bar{OG}_2 \cdot (\Delta + \gamma (v_1 + v_2)) = m_1 + m_2 + m_3 = v_1 \gamma d + A n \varphi \gamma d + i \gamma \varphi \rightarrow \text{dividido por } \gamma$$

$$\bar{OG}_2 (V + v_1 + v_2) = v_1 d + A n \varphi d + i \varphi$$

• \bar{OB}_2

$$\bar{OB}_2 \cdot (V + v_1 + v_2) = I_4 \varphi = I_O \varphi$$

INUNDACION

- $\overline{\alpha G_2} = \overline{\alpha B_2} \rightarrow$ Esta aproximación viene a ser análoga a la que hicimos al definir los MTC, es decir, $\overline{BM_e} \approx \overline{GM_e}$ ($\cos \varphi \approx 1$)

$$\overline{\alpha G_2} \cdot (\nabla + v_1 + v_2) = \overline{\alpha B_2} \cdot (\nabla + v_1 + v_2) \rightarrow v_1 \cdot d + An \varphi d + i \varphi = I_{\alpha} \cdot \varphi \rightarrow$$

$$v_1 d = \varphi [I_{\alpha} - An d - i] \quad \text{de la figura } d = k - n$$

$$v_1 d = \varphi [I_{\alpha} - An(k-n) - i] \rightarrow v_1 d = \varphi [I_{\alpha} - An k + An^2 - i]$$

$$\text{Según la expresión (2)} \rightarrow An = kS \rightarrow v_1 d = \varphi [I_{\alpha} - kS \cdot k + An^2 - i] \rightarrow$$

$$v_1 d = \varphi [I_{\alpha} - Sk^2 + An^2 - i]$$

La expresión entre corchetes coincide con la expresión (1) del momento de inercia, I_F , del método de pérdida de empuje.

$$\text{Para simplificar su expresión llamémosle } I_{(F)} = I_{\alpha} + An^2 - i - Sk^2 \rightarrow$$

$$v_1 d = \varphi \cdot I_{(F)} \quad \text{siendo } \varphi = \frac{t}{L} \rightarrow \boxed{t = \frac{L \cdot v_1 \cdot d}{I_{(F)}}}$$

c) Comparación del trimado por ambos métodos

- Los resultados obtenidos por el método de pérdida de empuje son:

$$t = \frac{n \cdot L}{\overline{BM_e}} \quad \text{con } n = \frac{l^2}{2(L-l)} \text{ en valor absoluto, y } \overline{BM_e} = \frac{I_F}{\nabla} \Rightarrow \boxed{t = \frac{l^2 \cdot L \cdot \nabla}{2(L-l) \cdot I_F}}$$

- Por el método del peso añadido

$$t = \frac{L v_1 d}{I_{(F)}} \quad \text{con } d = \frac{l}{2}; \quad v_1 = l B T_1 \quad \text{y} \quad T_1 = \frac{T L}{L-l} \rightarrow \text{Sustituyendo}$$

$$t = \frac{L \cdot l B T_1 \cdot \frac{l}{2}}{I_{(F)}} = \frac{L l^2 B \cdot T_1}{2 I_{(F)}} = \frac{L l^2 B T L}{2 I_{(F)} (L-l)} \quad \text{pero } B T L = \nabla \rightarrow$$

$$\boxed{t = \frac{L l^2 \nabla}{2 I_{(F)} (L-l)}}$$

c. q. d.

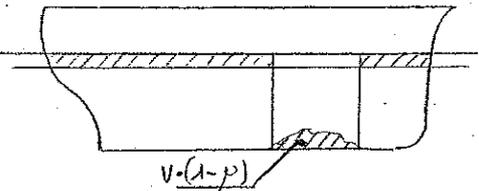
BUQUE.

EFFECTO DE LA INUNDACION DE UN COMPARTIMIENTO SOBRE LAS CALADAS DE UN BUQUE.

Análogamente al caso de la balsa, suponemos que se produce la inundación de un compartimiento centrado respecto a crujía, de tal forma que solamente se altera el trimado. Al mismo tiempo, suponemos que el compartimiento, aunque permeable en libre comunicación con la mar, no es lo suficientemente grande como para que el buque pierda toda su flotabilidad, produciéndose el equilibrio cuando la superficie libre en el compartimiento alcanza el nivel exterior.

Si V es el volumen del compartimiento inundado hasta un determinado calado o línea de agua, y μ su permeabilidad volumétrica, la pérdida de empuje o el peso añadido será $\rightarrow V \cdot \mu \cdot \gamma = f(T)$. \rightarrow El equilibrio se producirá cuando:

a) Método de pérdida de empuje.- El empuje perdido, $\mu V \gamma$, hasta la flotación de equilibrio, sea igual al empuje recuperado por la zona no averiada por encima de la flotación original más el empuje de la carga que ocupe la fracción $(1-\mu)$ del compartimiento inundado.

 Nuevo empuje

$V \cdot (1-\mu)$

b) Método del peso añadido.- El peso del buque más el peso de todo el agua embarcada sea igual al desplazamiento del volumen que desplaza el buque.

Método de pérdida de empuje

Como siempre el proceso de cálculo se descompone en dos pasos:

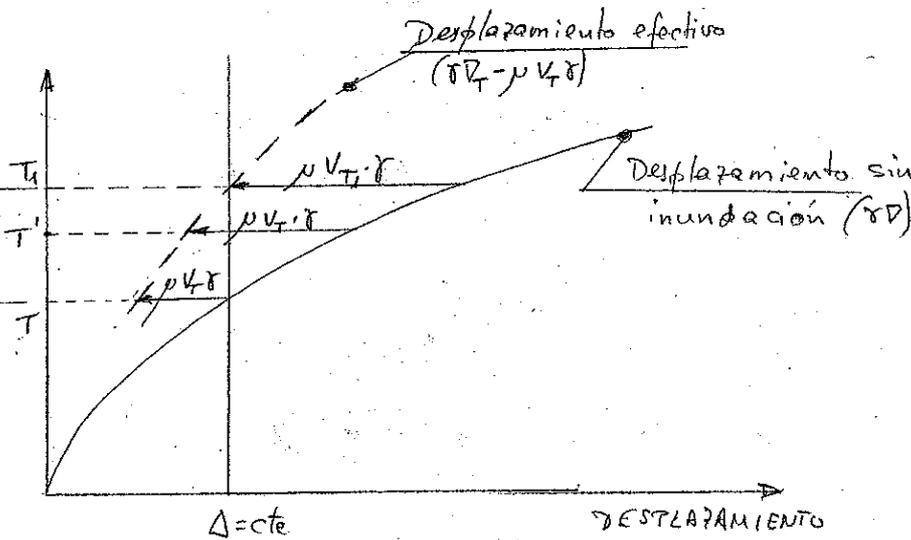
- 1.- Inmersión paralela \rightarrow inundación paralela
- 2.- Cambio de trimado.

INUNDACIÓN

1.- Inmersión paralela → Nuevo calado T_1

Inicialmente el buque estaba en equilibrio → $\Delta = \gamma V$ En este método $\Delta = cte$

Al producirse la avería el empuje correspondiente a cada calado → γV_T , hay que restarle el empuje que se pierde → $\rho V_T \gamma$ Siendo V_T el volumen del compartimento inundado correspondiente a ese calado. Es decir, para un calado cualquiera T el empuje resultante es $\gamma V_T - \rho V_T \gamma$. El equilibrio se restablecerá para un calado T_1 en que se cumple → $\Delta = \gamma V_{T_1} - \rho V_{T_1} \gamma$



El calado T_1 de equilibrio se obtiene con la curva hidrostática de desplazamiento.

Procedimiento:-

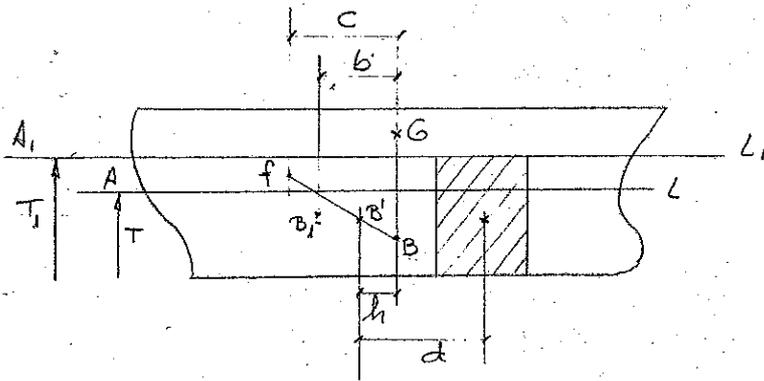
- a) Trazamos la curva $\Delta = f(T)$, que será una recta vertical pues por este método $\Delta = cte$
- b) A cada punto de la curva $\gamma V = f(T)$ le restamos el valor $\rho V_T \gamma$ con lo que obtendremos una serie de puntos.
- c) Uniendo todos estos puntos obtendremos la curva de empuje efectivo $\gamma V_T - \rho V_T \gamma$
- d) El punto de corte de esta curva con la recta $\Delta = cte$ nos dará el calado T_1 que andamos buscando.

La diferencia $T_1 - T$ nos da la variación de calado debida a la inmersión paralela.

Aunque el método descrito es el procedimiento correcto, en algunas ocasiones si la diferencia $T_1 - T$ no es muy grande, $T_1 - T = \Delta T$, se puede hacer la hipótesis simplificada de área de la flotación constante $A_f = cte$.

2. Momento de trimado \rightarrow Debido a la inmersión paralela.

En este método los valores del peso y del empuje resultante, ΣV , no cambian, y además el c.d.f. G no se altera.



Sean:

- $B \rightarrow$ c.d.c. inicial, correspondiente a la flotación AL . Estará alineado con el c.d.f. G .
- $B_1 \rightarrow$ c.d.c. resultante tras la inmersión paralela después de quitar el volumen inundado \Rightarrow

El momento de trimado será: $\rightarrow M_{tr} = \Delta \cdot b$.

Para obtener este momento de trimado con $b = \overline{GB_1} = \overline{BB_1}$, lo vamos a hacer en dos etapas:

a) De B a B' ($B \rightarrow B'$) $\rightarrow \overline{BB'} = h$.

Siendo B' el c.d.c. correspondiente a la flotación A_1L_1 completa, es decir sin quitar el compartimento inundado.

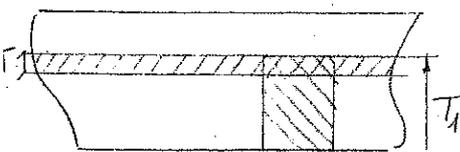
B' tiene que estar en la línea que une B (c.d.c. original correspondiente a la flotación AL) con f (c.d.f. del volumen de toda la rebanada ALA_1L_1).

Tomando momentos respecto a B' \rightarrow

$$\text{Mom. total}_{B'} = \text{Mom. inicial}_{B'} + \text{Mom. rebanada } ALA_1L_1_{B'}$$

Para determinar el volumen de la rebanada ALA_1L_1 , es decir sin quitar el compartimento inundado, decimos:

$$\begin{aligned} \text{Empuje ganado en toda la rebanada } (\square) &= \\ \text{Empuje perdido hasta } T_1 (\square) &, \text{ o por } \mu, \gamma \end{aligned}$$



INUNDACION

Por tanto los momentos respecto a B' nos quedan:

- Momento total_{B'} = $\Delta' \cdot 0 = 0$
- Momento inicial_{B'} = $\Delta \cdot h$
- Momento de la rebanada = empuje de la rebanada $\cdot [-(c-h)] = \mu v_1 r [-(c-h)]$

$$\Delta' \cdot 0 = \Delta \cdot h + \mu v_1 r [-(c-h)] \rightarrow \mu v_1 r (c-h) = \Delta \cdot h \quad \text{--- (A)}$$

b) De B' a B₁ (B' → B₁) → eliminando el empuje $\mu v_1 r$

Tomando momentos respecto a B' → Mom. final_{B'} = Mom. total_{B'} - Mom. perdido_{B'}

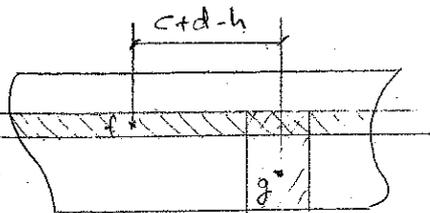
- Momento final_{B'} = $\Delta \cdot [-(b-h)]$
- Momento total_{B'} = $\Delta' \cdot 0 = 0$
- Momento perdido = $\mu v_1 r d$

$$\Delta \cdot [-(b-h)] = \Delta' \cdot 0 - \mu v_1 r d \rightarrow \mu v_1 r d = \Delta \cdot (b-h) \rightarrow$$

$$\mu v_1 r d = \Delta \cdot b - \Delta h \rightarrow \mu v_1 r d + \frac{\Delta \cdot h}{\mu} = \Delta \cdot b \quad \text{Sustituyendo } \Delta \cdot h \text{ según (A)}$$

$\mu v_1 r d + \mu v_1 r (c-h) = \Delta \cdot b \rightarrow \mu v_1 r \cdot (c+d-h) = \Delta \cdot b \rightarrow$ que es el momento de trimado. Si queremos podemos decir $\varphi_1 = \mu v_1 r \rightarrow$

$$M_{trim} = \Delta \cdot b = \mu \cdot v_1 \cdot r \cdot (c+d-h) = \varphi_1 \cdot (c+d-h)$$



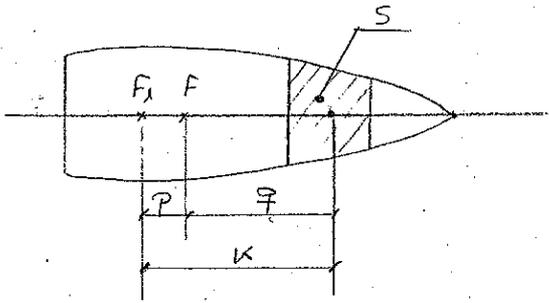
La expresión $\Delta \cdot b = \varphi_1 \cdot (c+d-h)$ es equivalente a un traslado de pesos, o mejor de empujes, pues $c+d-h$ es la distancia que separa sus respectivos c.d.p.

Si $T_1 - T$ es pequeño $\rightarrow T_1 - T = dT$ se puede simplificar reponiendo $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}$ siendo, esto sí, F el c.d.p. de toda la flotación (sin quitar nada)

3. Trimado.

Debido al momento de trimado $M_{tr} = \Delta \cdot b$, el barco girará alrededor del eje que pase por el c.d.p. de la flotación resultante tras quitar el área perdida por la inundación. (área "sana")

3.1. Centro de gravedad de la flotación resultante $\rightarrow (F_1)$



A = área de toda la flotación (completa)

S = área del compartimento inundado en esa flotación

F = c.d.p. de toda la flotación (completa)

F_1 = c.d.p. de la flotación resultante ($A-S$)

Tomando momentos respecto de F (Se podría tomar momentos respecto a cualquier otro punto)

$$A \cdot 0 + q(-S) = p(A-S) \rightarrow$$

$$p = \frac{-qS}{A-S}$$

3.2. Trimado $\rightarrow \oplus$

Como siempre que se trata de inclinaciones longitudinales al buscar el equilibrio suponemos que la posición longitudinal del c.d.c. coincidirá con la del c.d.p.

El momento de trimado $M_{tr} = \Delta \cdot b = \rho_1 (c+d-h)$ se tiene que compensar con el momento de transferencia de las cuñas de empuje \rightarrow

$$M_{tr} = I_{F_1} \cdot \varphi \cdot r$$

$$\left. \begin{aligned} I_{F_1} & \text{ es el momento de inercia de la flotación resultante } (A-S) = \\ & = I_F + Ap^2 - (i + Sk^2) \quad [i = \text{mom. inercia de } S] \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\varphi = \frac{t}{L}$$

$$M_{tr} = \Delta \cdot b = \rho_1 (c+d-h) = I_{F_1} \cdot \frac{t}{L} \cdot r \Rightarrow$$

$$t = \frac{\Delta \cdot b \cdot L}{\rho_1 I_{F_1}} = \frac{\Delta \cdot b \cdot L}{I_{F_1}} = \frac{\rho_1 (c+d-h) \cdot L}{\rho_1 I_{F_1}} = \frac{\rho_1 (c+d-h) \cdot L}{I_{F_1}}$$

Conocido t , F_1 y el sentido del trimado ya podemos calcular f y a

INUNDACIÓN

Método del peso añadido.

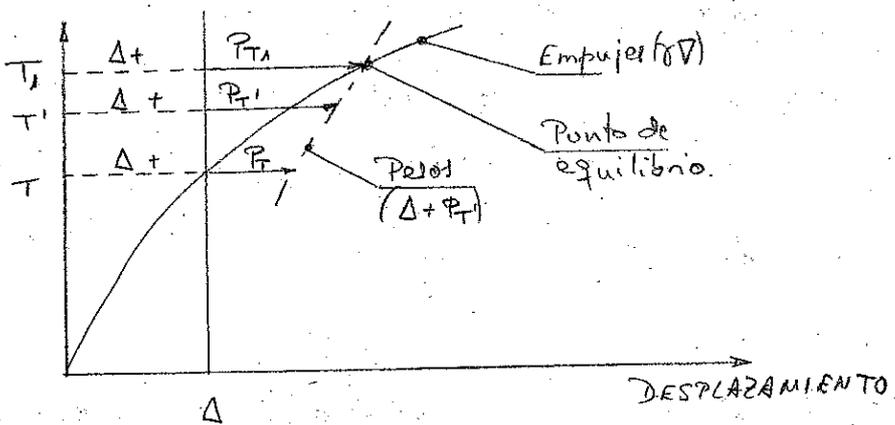
1.- Inmersión paralela → nuevo calado (T_1)

Al producirse la inundación para cada calado T' , el desplazamiento inicial Δ se lo va sumando al peso del agua embarcada hasta ese calado.

$P_{T'} = \rho V_{T'} \gamma$ Así hasta que se alcance un calado T_1 de equilibrio en que se cumpla →

$$\Delta + P_{T_1} = \Delta + \rho V_{T_1} \gamma = \gamma P_{T_1}$$

El calado T_1 que cumple esta condición lo obtenemos aquí también con la curva hidrostática de desplazamiento.



Procedimiento,-

a) Trazamos la recta vertical correspondiente al desplazamiento inicial Δ

b) Para una serie de calados T' obtenemos una familia de puntos correspondientes

$$a \quad \Delta + P_{T'} = \Delta + \rho V_{T'} \gamma$$

c) Uniendo todos estos puntos obtenemos la curva de pesos → $\Delta + P_T$

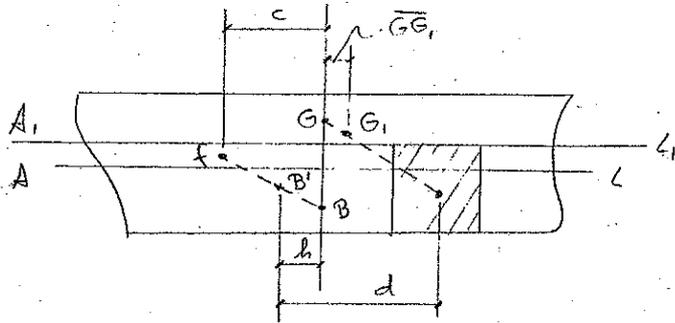
d) El punto de corte de esta curva con la curva de empuje (o desplazamiento) γV nos dará el calado T_1 que buscamos

La diferencia $T_1 - T$ es la variación de calado debida a la inmersión paralela.

2. Trimado

Por este método, debido a la inmersión paralela, el nuevo desplazamiento vale $\Delta_1 = \Delta + \phi_1 = \Delta + \mu v_1 \gamma$. Asimismo cambian el c.d.p. y el c.d.c.

2.1. Nuevo centro de gravedad ($G \rightarrow G_1$) $\rightarrow \overline{GG_1}$



Tomando momentos respecto de G

$$\text{Mom. total}_G = \text{Mom. inicial}_G + \text{mom. añadido}$$

$$\text{Peso añadido} \rightarrow \phi_1 = \mu v_1 \gamma$$

$$(\Delta + \phi_1) \cdot \overline{GG_1} = \Delta \cdot 0 + \phi_1 \cdot (d-h) = \mu v_1 \gamma (d-h)$$

$$\rightarrow (\Delta + \phi_1) \overline{GG_1} = \mu v_1 \gamma (d-h) \rightarrow (1)$$

2.2. Nuevo centro de carena ($B \rightarrow B'$) $\rightarrow \overline{BB'} = h$

Tomando momentos respecto del c.d.c. inicial B \rightarrow

$$\text{Mom. final}_B = \text{mom. inicial}_B + \text{mom. añadido}$$

$$\bullet \text{ Momento final} \rightarrow (\Delta + \phi_1) \cdot h$$

$$\bullet \text{ Momento inicial} \rightarrow \Delta \cdot 0$$

$$\bullet \text{ Momento añadido} \rightarrow \text{Si } f \text{ es el c.d.p. de la rebanada de empuje } A'L, L' \rightarrow$$

$$\text{Mom. añadido} = \text{vol. rebanada } A'L, L' \cdot \gamma \cdot c$$

Por otro lado, el empuje de la rebanada $A'L, L'$ coincidirá con el aumento de peso $\phi_1 = \mu v_1 \gamma \rightarrow$

$$\text{Mom. añadido} = \phi_1 \cdot c = \mu v_1 \gamma c$$

$$(\Delta + \phi_1) \cdot h = \Delta \cdot 0 + \mu v_1 \gamma c \rightarrow (\Delta + \phi_1) \cdot h = \mu v_1 \gamma \cdot c \rightarrow (2)$$

2.3. Momento de trimado

El momento de trimado debido a la inmersión paralela será igual al desplazamiento por la distancia que separa los nuevos centros de gravedad y de carena

$$M_{tri} = (\Delta + \phi_1) \cdot \overline{B'G_1}$$

INUNDACIONES

Para la separación horizontal entre ambos centros $\rightarrow \overline{B'G_1} = h + \overline{GG_1} \rightarrow$ sustituyendo

$$M_{L_1} = (\Delta + \rho_1) \cdot \overline{B'G_1} = (\Delta + \rho_1) (h + \overline{GG_1}) = \underbrace{(\Delta + \rho_1) \cdot h}_{(2)} + \underbrace{(\Delta + \rho_1) \cdot \overline{GG_1}}_{(1)}$$

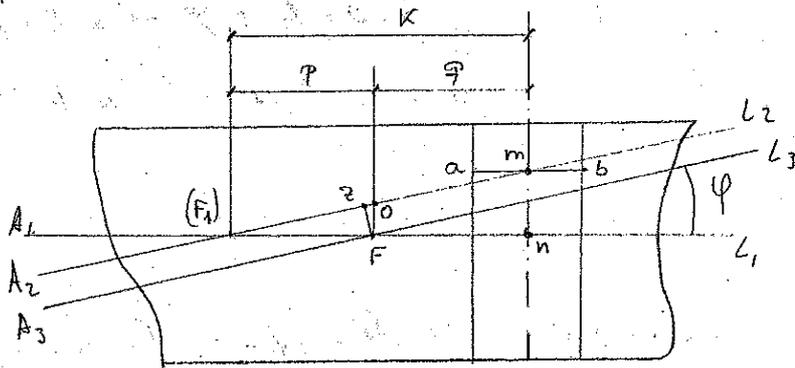
Sustituyendo las expresiones (2) y (1) anteriores \rightarrow

$$M_{L_1} = \mu v_1 r c + \mu v_1 r (d-h) \rightarrow \boxed{M_{L_1} = (\Delta + \rho_1) \cdot (h + \overline{GG_1}) = \mu v_1 r \cdot (c + d - h)} \quad (1)$$

Expresión análoga a la obtenida por el método de pérdida de empuje.

3.- Efecto de libre comunicación.

Como ya vimos en el caso de la balsa, debido al momento exterior el buque modificará su timado, lo que hará que embarque un peso añadido de agua, ρ_2 , correspondiente a un volumen v_2 , hasta alcanzar la flotación final de equilibrio $A_2 L_2$

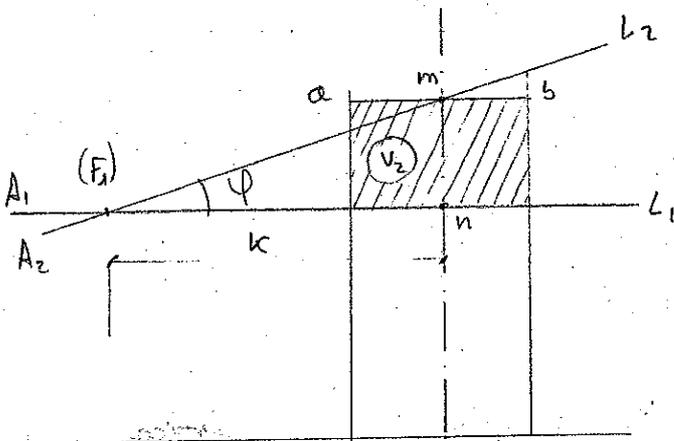


$A_2 L_2 \rightarrow$ Flotación definitiva de equilibrio

$F \rightarrow$ c. d. p. de la flotación $A_2 L_2$

$(F_1) \rightarrow$ punto de corte de las flotaciones $A_1 L_1$ y $A_2 L_2$

$A_3 L_3 \rightarrow$ Flotación auxiliar, paralela a $A_2 L_2$ y que pasa por $F \Rightarrow$ isocrena con $A_1 L_1$

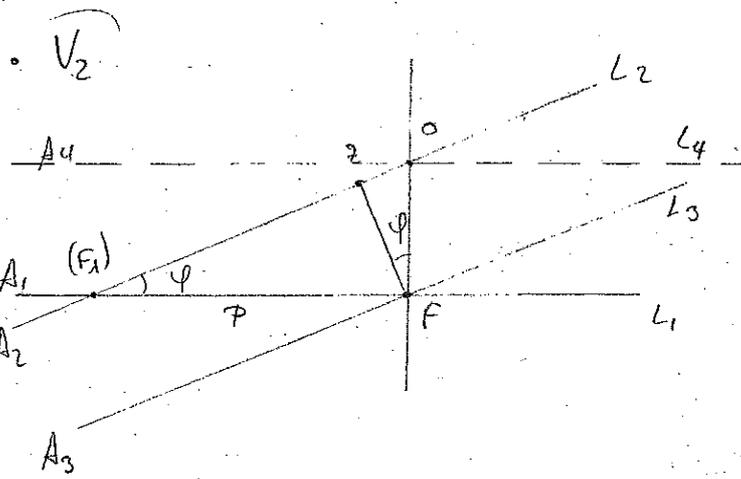


$(\cdot v_2)$ Sea $S =$ área media del compartimento inundado. ($\Rightarrow v_2$ pequeño)

Razonando igualmente que en el caso de la balsa $\rightarrow \rho_2 = \mu v_2 r$

$$\mu v_2 = S \cdot m \cdot n = S \cdot k \cdot \tan \varphi \approx S k \varphi$$

$$\underline{\underline{\mu v_2 = S \cdot k \cdot \varphi}}$$



Para compensar este peso extra ρ_2 se tiene que producir un incremento del empuje de igual valor.

$$\rho \times V_2 = \gamma V_2$$

Como la flotación A_2L_2 es paralela a la A_1L_1 y la A_2L_2 es la definitiva \rightarrow
 $V_2 = \text{vol de la rebanada } A_2L_2 A_3L_3$

$$V_2 = A_{A_2L_2} \times \bar{F}_2 = A_{A_2L_2} \times \bar{F}_0 \cdot \cos \varphi \rightarrow \text{pero } A_{A_2L_2} \times \cos \varphi = A_{11}$$

$$\text{Siendo } A \text{ el área de la flotación } A_1L_1 \rightarrow V_2 = A \cdot \bar{F}_0 \rightarrow$$

$$\bar{F}_0 = \rho + \gamma \varphi \rightarrow V_2 = A \cdot \rho + \gamma \varphi \approx A \cdot \rho + \gamma \varphi \rightarrow V_2 = \underline{A \cdot \rho + \gamma \varphi} \quad (?)$$

• Punto de corte $(F_1) \rightarrow \varphi$

$$\text{Igualando ambos volúmenes } \rho V_2 = V_2 \rightarrow S \cdot k \cdot \varphi = A \cdot \rho \cdot \varphi \rightarrow \boxed{k \cdot S = A \cdot \rho}$$

$$\text{Como } k = \rho + \gamma \text{ según se ve en la primera figura } \rightarrow (\rho + \gamma) \cdot S = A \cdot \rho \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\gamma \cdot S}{A - S}}$$

Expresión análoga a la del método de pérdida de empuje. Como se ve, llegar a este punto, es más fácil calcular el trimado t en función de $I_{(F_1)}$ (correspondiente a $A-S$) como se vio en el caso de la balsa.

4: Trimado final

No obstante lo dicho anteriormente, si alguien desea seguir este método \rightarrow

• El momento de trimado total estará compuesto de tres momentos.

a) Debido a la inmersión paralela hasta $A_1L_1 \rightarrow m_1 = \rho V_1 \gamma (c+d-h)$
 según la expresión (1)

b) El debido al efecto de libre comunicación (peso ρ_2 en la vertical de F y traslado hasta su posición) $\rightarrow m_2 = \rho_2 \cdot \varphi = \rho V_2 \cdot \gamma \cdot \varphi$

$$\rho V_2 \gamma = \gamma V_2 \rightarrow \gamma V_2 = \gamma \cdot A \cdot \rho \cdot \varphi \quad (\text{por (2)}) \rightarrow m_2 = \gamma A \cdot \rho \cdot \varphi \cdot \varphi$$

INUNDACION

c) El debido a la superficie libre $\rightarrow m_3 = i \cdot \gamma \cdot \Psi$

Siendo i el momento de inercia de la superficie inundada S

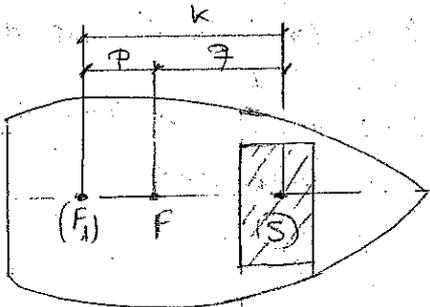
A su vez, el momento de trimado se tendrá que compensar con la transferencia de las cuñas de flotación $I_F \cdot \Psi \cdot \gamma$

$$M_{tr} = m_1 + m_2 + m_3 = \rho v_1 \gamma (c+d-h) + \gamma A \cdot \phi \cdot \gamma \Psi + i \cdot \Psi \cdot \gamma \quad \downarrow \rightarrow$$

$$M_{tr} = I_F \cdot \Psi \cdot \gamma$$

$$\rho v_1 \gamma (c+d-h) + \gamma A \cdot \phi \cdot \gamma \Psi + i \cdot \Psi \cdot \gamma = I_F \cdot \Psi \cdot \gamma \rightarrow$$

$$\rho v_1 (c+d-h) = \Psi [I_F - A \cdot \phi \cdot \gamma - i] \rightarrow \text{Según la figura } \gamma = k \cdot \phi \rightarrow$$



$$\rho v_1 (c+d-h) = \Psi [I_F - A \cdot \phi (k - \phi) - i] \rightarrow$$

$$\rho v_1 (c+d-h) = \Psi [I_F + A \phi^2 - A \phi k - i]$$

$$\text{por (S)} \quad A \cdot \phi = k S \rightarrow$$

$$\rho v_1 (c+d-h) = \Psi [I_F + A \phi^2 - S k^2 - i] = \Psi [I_F + A \phi^2 - (i + S k^2)]$$

La expresión entre corchetes coincide con el valor de $I_{(G)}$ del método de pérdida de empuje

$$\rho v_1 (c+d-h) = I_{(F)} \cdot \Psi$$

$$\text{como } \Psi = \frac{t}{L} \rightarrow$$

$$\rho v_1 (c+d-h) = I_{(F)} \cdot \frac{t}{L} \rightarrow$$

$$t = \frac{\rho v_1 (c+d-h) \cdot L}{I_{(F)}}$$

Como ya sabíamos.

Como resumen podríamos decir que la variación horizontal del c.d.g. G viene determinada por el embarque de agua inicial τ_1 , más el nuevo embarque τ_2 debido al efecto de libre comunicación, más el efecto de las superficies libres. Esta variación es la que nos va a permitir obtener el momento de trimado.

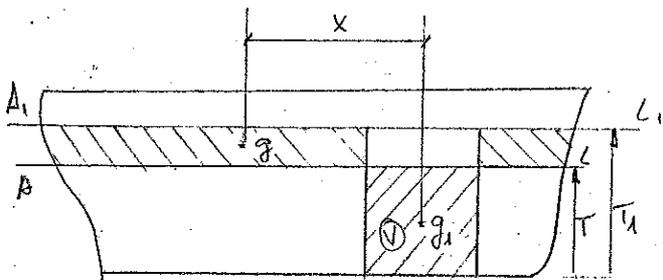
A su vez el c.d.c. vendrá determinado por las inmersiones paralelas: $A_1 L_1 \rightarrow A_2 L_2$, $A_3 L_3 \rightarrow A_4 L_4$ y después el giro $A_4 L_4 \rightarrow A_5 L_5$

Regla práctica para determinar el trimado después de una inundación -

1º) Se calcula la pérdida de empuje μV por debajo de la flotación inicial (antes de inundarse) AL , y la posición del c.d.p. de ese volumen (g_1)

2º) Determinar el aumento de calado mediante la expresión

$$T_1 - T = \frac{\mu V}{A'}$$



Siendo:

μV = volumen de agua embarcada hasta la flotación inicial AL

$$A' = A - S$$

A = área de la flotación inicial AL

S = área del compartimento inundado en la flotación inicial

Con esto estamos suponiendo que A' permanece constante en la elevación A_1L_1

Si $T_1 - T$ sale "elevado" se recalcula de nuevo mediante:

$$T_1' - T = \frac{\mu V}{\frac{A_1' + A'}{2}}$$

Donde $A_1' = A_1 - S$, siendo A_1 el área de toda la flotación A_1L_1 , correspondiente al calado T_1 .

3º) Se calcula la posición del c.d.p. (g) del empuje ganado (zona \square). Si la diferencia $T_1 - T$ es pequeña coincidirá con el centro de gravedad de la flotación $A' = A - S$. Si la diferencia es grande habría que componer los c.d.p. de las flotaciones $A' = A - S$ y A_1' correspondiente a A_1L_1

4º) Se estima que el momento que modifica el trimado es

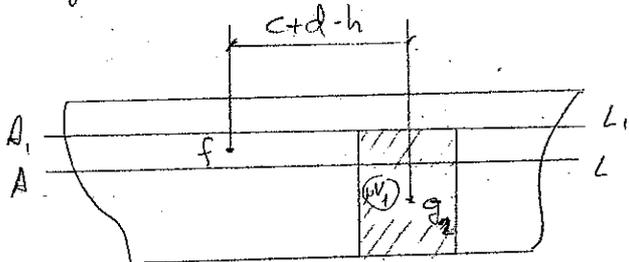
$$|M_{tr} = \mu V \gamma x|$$

Siendo x la distancia que separa los c.d.p. de los empujes ganados y perdidos.

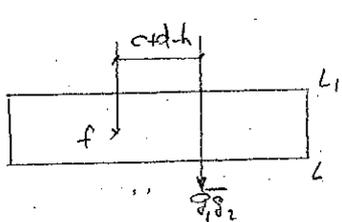
Como ya sabemos, según el método de pérdida de empuje, el momento

INUNDACIÓN

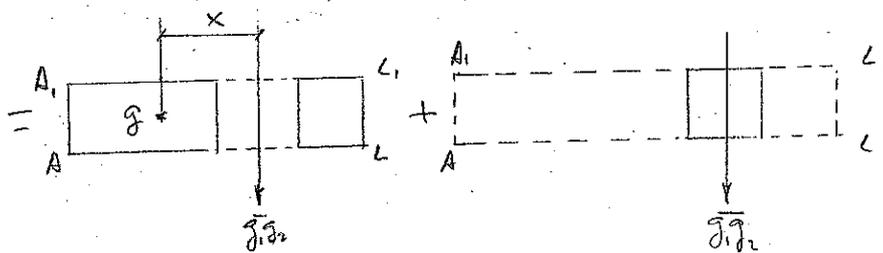
que modifica el trimado es $M_{tr} = \rho v_1 \gamma (c+d-h)$, siendo ρv_1 el volumen del compartimiento inundado hasta la flotación $A_1 L_1$, y por tanto igual al de toda la rebanada $A L A_1 L_1$ y f el c.d.p. de toda esta rebanada



Si los centros de gravedad de ρv (g_1) y ρv_1 (g_2) están en la misma vertical ambos momentos son iguales.



ρv_1



$$= \rho v + \rho (v_1 - v)$$

Los volúmenes de la rebanada serán $\rho v_1 = \rho v + \rho (v_1 - v)$

Tomando momentos respecto de la vertical de los c.d.p. g_1 y $g_2 \rightarrow$

$$\text{Mom total} = \sum \text{Mom.} \rightarrow \rho v_1 (c+d-h) = \rho v \cdot x + \rho (v_1 - v) \cdot 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\rho v_1 \gamma (c+d-h) = \rho v \gamma x = M_{tr}}$$

5º/ Calculamos los MTC correspondientes a la nueva flotación resultante

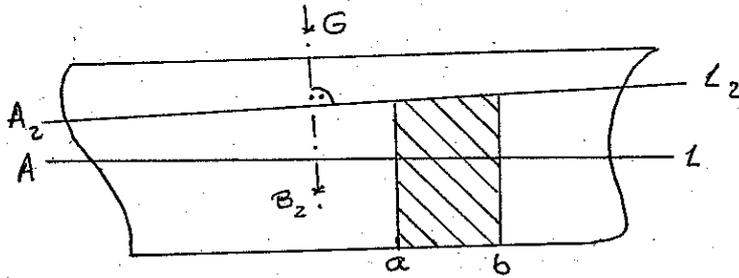
$$MTC = \frac{I_{F_1} \cdot \gamma}{100 L}$$

siendo $I_{F_1} = I_F + A \cdot p^2 - i - S x^2$ como ya tenemos visto.

6º El trimado $t = \frac{M_{tr}}{MTC} = \frac{\rho v \gamma x}{MTC}$

De aquí ya podríamos calcular f y a .

CÁLCULO POR EL MÉTODO DE PÉRDIDA DE EMPUJE UTILIZANDO LAS CURVAS DE BONJEAN



AL flotación inicial
A₂L₂ flotación final

Condición:

La recta que une el centro de gravedad del buque (que en este procedimiento suponemos que permanece fijo) con el centro de carena de la flotación final resultante A₂L₂ (parte "sana") debe ser vertical a esta misma flotación.

Solución

La solución requiere un proceso iterativo con el siguiente procedimiento:

- Se traza una flotación inicial supuesta.
- Por medio de las curvas de Bonjean se determina su volumen sumergido ∇ y la posición de su centro de carena $\otimes B$ (sin considerar en ningún momento ^{quitando} la posible zona inundada).
- Si por un lado el $\gamma \nabla$ obtenido coincide, con la aproximación que deseemos, con el Δ , y por otro el $\otimes G$ y el $\otimes B$ calculado coinciden en la misma vertical a A₂L₂, el problema está resuelto.

Lógicamente este proceso habrá que repetirlo bastantes veces.

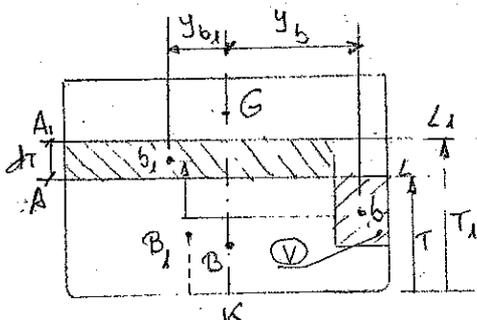
Si el trimado no es muy grande podría aceptarse la aproximación $\otimes G \approx \otimes B$ de A₂L₂.

INUNDACIÓN

ESTABILIDAD TRANSVERSAL. MÉTODO DE PÉRDIDA DE EMPUJE.

Partimos de la situación previa de equilibrio

1. Inmersión paralela



1.1. T_1

Si no podemos considerar que el buque es de cortadas verticales debemos utilizar las curvas hidrostáticas como se explicó en el caso del trimado.

Si podemos considerar $A_f = \text{cte}$ en la variación

del calado dT

Empuje perdido = empuje recuperado

$$\rho V = (A_f - S) dT \rightarrow dT = \frac{\rho V}{A_f - S} \rightarrow T_1 = T + dT$$

Obviamente podríamos utilizar cualquier otro procedimiento.

1.2. Nuevo centro de carena B_1

$\bar{\kappa} B_1$ lo podemos obtener, por ejemplo, a partir de la componente vertical del momento de transferencia entre el empuje perdido y el ganado, puesto que por este procedimiento consideremos el volumen total, V , constante.

$$\bar{\kappa} B_1 = \bar{\kappa} B + d\bar{\kappa} B$$

$$V \cdot d\bar{\kappa} B = \rho V (\bar{\kappa} B_1 - \bar{\kappa} B) \rightarrow d\bar{\kappa} B = \frac{\rho V}{V} (\bar{\kappa} B_1 - \bar{\kappa} B) = \frac{\rho V}{\Delta} (\bar{\kappa} B_1 - \bar{\kappa} B)$$

Si consideramos que el área de la flotación permanece constante en dT

$$\bar{\kappa} B_1 = T + \frac{dT}{2} \rightarrow d\bar{\kappa} B = \frac{\rho V}{\Delta} \left(T + \frac{dT}{2} - \bar{\kappa} B \right) = \frac{\rho V}{\Delta} \left(T + \frac{dT}{2} - \bar{\kappa} B \right)$$

Y_{B_1}

Si aplicamos también el momento de transferencia

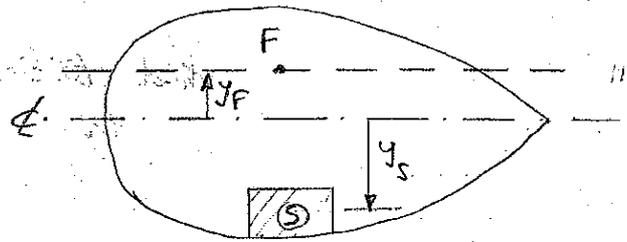
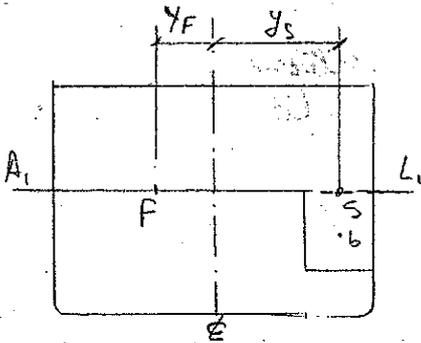
$$V(Y_{B_1} - Y_B) = \rho V (y_{b1} - y_b) \rightarrow Y_{B_1} - Y_B = \frac{\rho V}{V} (y_{b1} - y_b) = \frac{\rho V}{\Delta} (y_{b1} - y_b)$$

Si consideramos que el buque estaba inicialmente adrizado $y_B = 0 \rightarrow$

$$y_{B_1} = \frac{\Delta V}{\Delta} (y_{S_1} - y_B) = \frac{\Delta V}{\Delta} (y_{S_1} - y_B)$$

Si además podemos suponer que $A_f = \text{cte}$ en $dT \rightarrow y_{B_1} = y_F$, siendo y_F la coordenada del c.d.p. de la flotación A_1L_1 resultante $(A_f - S)$

1.3. Nuevo radio metacéntrico $\overline{BM}_E = \frac{I_1}{\Delta}$



• Nuevo centro de la flotación F

La coordenada y_F se obtendrá, por ejemplo, tomando momentos respecto a E

$$(A_f - S) \cdot y_F = A_f \cdot 0 - S \cdot y_S \rightarrow y_F = \frac{-S y_S}{(A_f - S)}$$

• Momento de inercia resultante I_1

Podemos calcularlo como el momento de inercia de toda la flotación A_1L_1 , menos el momento de inercia del área S que se pierde, todos ellos referidos al eje longitudinal que pasa por F .

$$I_1 = (I_{A_1L_1} + A_f \cdot y_F^2) - (i + S \cdot (y_F + y_S)^2)$$

Siendo i el momento de inercia propio del área S , e y_S la coordenada del c.d.p. de este área (en principio y_S no tiene por qué ser igual a y_B).

Si consideramos que $A_f = \text{cte}$ en $dT \Rightarrow I_{AL} = I_{A_1L_1}$

• Variación del radio metacéntrico por efecto de la inundación. $d\overline{BM}$

$$d\overline{BM} = \overline{BM}_E - \overline{BM}_L = \frac{I_1}{\Delta} - \frac{I_{AL}}{\Delta}$$

INUNDACIÓN

Como en este procedimiento $\nabla = \text{cte} \rightarrow$

$$d\bar{B}M = \frac{dI}{\nabla} = \frac{I_1 - I_{A1}}{\nabla}$$

1.4. Variación de la altura metacéntrica, $d\bar{G}M_t$

Despreciando el efecto geométrico del trimado $\bar{G}M = \bar{K}M - \bar{K}G = \bar{K}B + \bar{B}M - \bar{K}G$

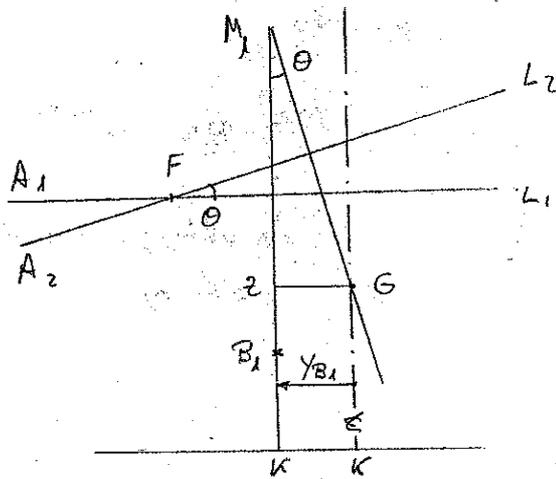
$$\Rightarrow d\bar{G}M = d\bar{K}B + d\bar{B}M - d\bar{K}G$$

Como por este método $\bar{K}G = \text{cte} \Rightarrow d\bar{K}G = 0 \Rightarrow d\bar{G}M = d\bar{K}B + d\bar{B}M$.

$d\bar{K}B > 0$ siempre, mientras que $d\bar{B}M$ sólo depende de dI , luego, como vemos, podrá darse el caso curioso de que después de la inundación $d\bar{G}M > 0$

2. Ángulo de escora permanente

2.1. Suponiendo estabilidad inicial



$$\text{tg } \theta = \frac{\bar{G}z}{\bar{z}M_1}$$

Con:

$$\bar{G}z = Y_{B_1} = \frac{\nu V}{\nabla} (y_{B_1} - y_b)$$

$\bar{z}M_1 = \bar{K}B_1 + \bar{B}_1M_1 - \bar{K}G$, que define la nueva altura metacéntrica $\bar{G}M_1$,

$$\text{tg } \theta = \frac{Y_{B_1}}{\bar{G}M_1} = \frac{\nu V}{\nabla} \frac{(y_{B_1} - y_b)}{\bar{G}M_1} = \frac{\gamma \nu V}{\Delta} \frac{(y_{B_1} - y_b)}{\bar{G}M_1}$$

Según esto el momento de escora nos queda

$$M_{to. esc.} = \Delta \cdot \bar{G}M_1 \cdot \text{tg } \theta = \gamma \nu V (y_{B_1} - y_b)$$

que es totalmente análogo al momento de trimado que obtuvimos en la estabilidad longitudinal de la inundación, es decir, el momento de escora es igual a la componente

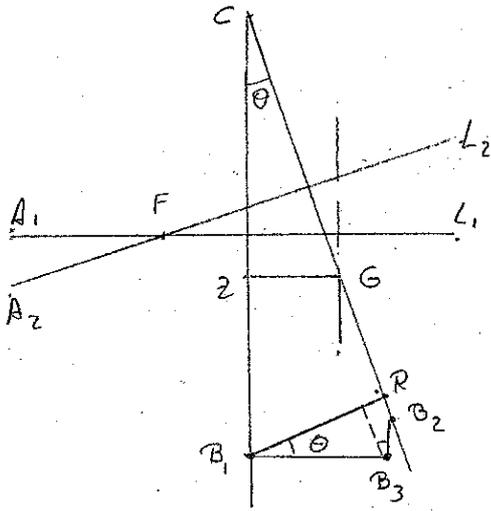
transversal del momento de transferencia entre al empuje perdido y recuperado.

Si consideramos que $A_f = \text{ste on } dT \Rightarrow y_b = y_f$ y por tanto

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\rho V (y_f - y_b)}{\nabla \cdot \bar{GM}_1} = \frac{\gamma \rho V (y_f - y_b)}{\Delta \cdot \bar{GM}_1} = \frac{y_{B_1}}{\bar{GM}_1}$$

$$M_{\text{rec}} = \Delta \cdot \bar{GM}_1 \cdot \operatorname{tg} \theta = \gamma \rho V (y_f - y_b)$$

2.2. Buque de costados verticales



Si el ángulo de escora permanece el demorado grande para considerarlo estabilidad inicial, tal vez podamos considerar que el buque es de costados verticales. En este caso

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\bar{B}_1 Z}{\bar{B}_1 C} = \frac{y_{B_1}}{\bar{B}_1 C - \bar{B}_1 Z}$$

Siendo:

$$\bar{B}_1 C = \frac{\bar{B}_1 R}{\operatorname{sen} \theta}$$

Según vamos a estudiar el buque de costados

rectos $\bar{B}_1 R = \frac{I_f}{\nabla} \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} \right]$, con lo que nos queda

$$\bar{B}_1 C = \frac{\bar{B}_1 R}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{I_f}{\nabla} \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} \right] \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \rightarrow \bar{B}_1 C = \frac{I_f}{\nabla} \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} \right] = \bar{B}_1 M_c \cdot \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} \right]$$

(aunque le quitamos el volumen del compartimento inundado, el buque puede seguir siendo de costados verticales, únicamente que no será simétrico).

$$\bar{B}_1 Z = kG - kB_1$$

Con lo que nos queda

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_{B_1}}{\bar{B}_1 M_c \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{2} \right] - (kG - kB_1)} \rightarrow \operatorname{tg} \theta \rightarrow 0$$

2.3. Grandes ángulos

Si la suposición de costados verticales no fuese aceptable, tendríamos que determinar unos kN especiales (quitando el compartimento inundado).

PROBLEMA DE INUNDACION

Buque antes de la inundación: $T_m = 10\text{ m}$; $\Delta = 30.000\text{ Tm}$; $\bar{K}G = 9,40\text{ m}$; $\bar{K}M_t = 11,40\text{ m}$;

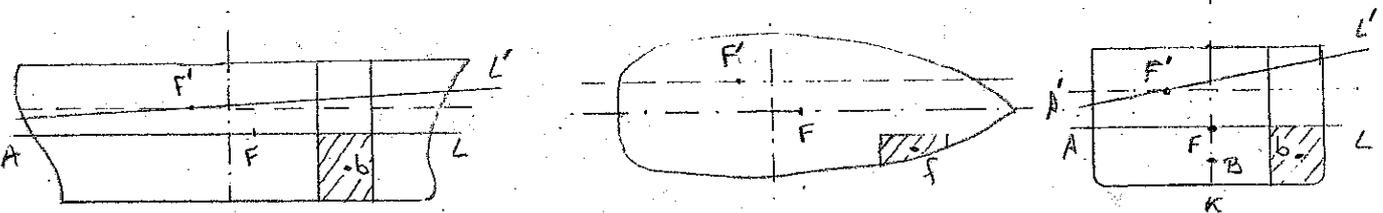
$\bar{K}B = 5,25\text{ m}$; $\bar{K}M_p = 170\text{ m}$; $A_f = 4540\text{ m}^2$; $\bar{\sigma}_F = 1\text{ m}$; $L_{pp} = 220\text{ m}$; $\gamma = 1,025\text{ Tm/m}^3$

Compartimiento inundado: $a = 100\text{ m}^2$; $\bar{\sigma}_f = 70\text{ m}$; $y_f = 13\text{ m (E}_f)$; volumen antes de la inundación = 1000 m^3 ; $\bar{\sigma}_b = 68,5\text{ m}$; $y_b = 12\text{ m (E}_f)$; $\bar{K}B = 5\text{ m}$; $\mu = 0,70$

Se pide calcular la escora y el trimado finales utilizando el método de pérdida de empuje.

Note: Supóngase que A_f permanece constante en las variaciones de calado y que el momento de inercia propio del compartimiento inundado es despreciable.

Solución



1) Volumen permeable = $\mu \cdot v = 0,70 \times 1000 = 700\text{ m}^3$

2) Área de la flotación resultante $\rightarrow A'_f = A_f - a = 4540 - 100 \rightarrow A'_f = 4440\text{ m}^2$

3) Posición del nuevo centro de la flotación $F' \rightarrow$ Tomando momentos respecto a F

$$A'_f \cdot \bar{F}F' = A_f \cdot 0 + a(\bar{\sigma}_f - \bar{\sigma}_F) \rightarrow \bar{F}F' = \frac{a(\bar{\sigma}_f - \bar{\sigma}_F)}{A'_f} = \frac{100(70 - 1)}{4440} \rightarrow \bar{F}F' = 1,554 \text{ hacia } \bar{F}_f$$

$$A'_f \cdot \bar{F}F'_y = A_f \cdot 0 + a(y_f - y_F) \rightarrow \bar{F}F'_y = \frac{a(y_f - y_F)}{A'_f} = \frac{100(13 - 0)}{4440} \rightarrow \bar{F}F'_y = 0,293 \text{ hacia } B_c$$

4) Nuevo radio metacéntrico transversal $\bar{B}M'_t = \frac{I'_t}{\nabla}$

Momento de inercia original I_t (constante en la inmersión paralela)

$$\bar{B}M_t = \frac{I_t}{\nabla} = \bar{K}M_t - \bar{K}B \rightarrow I_t = (\bar{K}M_t - \bar{K}B) \cdot \nabla = (\bar{K}M_t - \bar{K}B) \cdot A_f / \gamma$$

$$I_t = (11,40 - 5,25) \cdot \frac{30.000}{1,025} \rightarrow I_t = 180.000\text{ m}^4$$

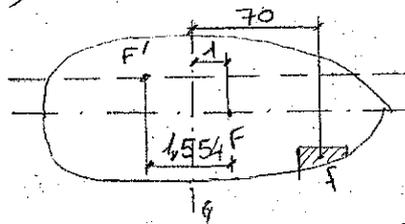
Llevando todos los momentos de inercia hasta F' por Steiner

$$I'_t = (I_t + A_f \cdot \bar{F}F'^2) - (a \cdot \bar{F}F'^2) \rightarrow \text{es despreciable frente a } "a \cdot \bar{F}F'^2"$$

$$I'_t = (180.000 + 4540 \cdot 0,293^2) - 100 \cdot (13 + 0,293)^2 \rightarrow I'_t = 162.719,369\text{ m}^4$$

$$\bar{B}M'_t = \frac{I'_t}{\nabla} = \frac{I'_t}{\Delta} = \frac{162.719,369 \times 1,025}{30.000} \rightarrow \bar{B}M'_t = 5,560\text{ m}$$

5) Nuevo radio metacéntrico longitudinal $\overline{BM}'_e = \frac{I_e}{\nabla}$



Momento de inercia original $\rightarrow I_e = \overline{BM}_e \cdot \nabla = (\overline{KM}_e - \overline{KB}) \cdot \frac{\Delta}{\gamma}$

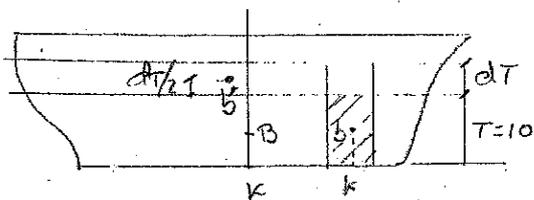
$$I_e = (170 - 5,25) \frac{30000}{1,025} \rightarrow I_e = 4.821.951,220 \text{ m}^4$$

$$I_e' = (I_e + A_f \cdot \overline{FF}'^2) - (x + a \cdot \overline{FF}'^2) \rightarrow$$

$$I_e' = (4.821.951,220 + 4540 \cdot 1,554^2) - 100 \cdot (70 - 1 + 1,554)^2 \rightarrow I_e' = 4.335.128,247 \text{ m}^4$$

$$\overline{BM}'_e = \frac{I_e'}{\nabla} = \frac{I_e' \cdot \gamma}{\Delta} = \frac{4.335.128,247 \cdot 1,025}{30000} \rightarrow \overline{BM}'_e = 148,117 \text{ m}$$

6) Inmersión paralela



$$dT = \frac{\mu \cdot v}{A_f} = \frac{700}{4440} = 0,158 \text{ m}$$

$d\overline{KB}$ \rightarrow por el momento de transferencia

$$\Delta \cdot d\overline{KB} = \gamma \mu v (\overline{KB}' - \overline{KB}) = \gamma \mu v (T + \frac{dT}{2} - \overline{KB})$$

$$d\overline{KB} = \frac{\gamma \mu v (T + \frac{dT}{2} - \overline{KB})}{\Delta} = \frac{1,025 \cdot 700 \cdot (10 + \frac{0,158}{2} - 5)}{30000} \rightarrow d\overline{KB} = 0,121 \text{ m}$$

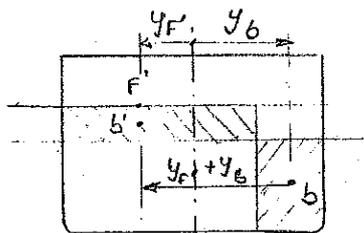
7) Alturas metacéntricas

$$\overline{GM}'_t = \overline{KB} + d\overline{KB} + \overline{BM}'_t - \overline{KB} = 5,25 + 0,121 + 5,560 - 9,4 \rightarrow \overline{GM}'_t = 1,531 \text{ m}$$

$$\overline{GM}'_e = \overline{KB} + d\overline{KB} + \overline{BM}'_e - \overline{KB} = 5,25 + 0,121 + 148,117 - 9,4 \rightarrow \overline{GM}'_e = 144,088 \text{ m}$$

8) Ángulo de escora.

Suponiendo estabilidad inicial



Momento de escora = componente transversal del momento de transferencia de los empujes ($b \rightarrow b'$)

$$M_{esc} = \gamma \mu v (y_{b'} - y_b) = \gamma \mu v (y_{F1} - y_b)$$

y además $M_{esc} = \Delta \cdot \overline{GM}_t \cdot \text{tg} \theta \rightarrow$ Trabajando con valores absolutos

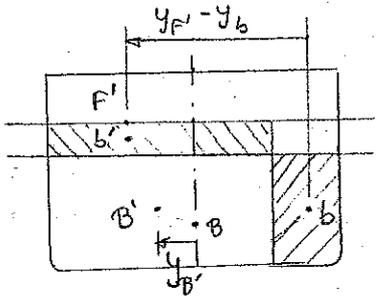
$$\text{tg} \theta = \frac{\gamma \mu v (y_{F1} - y_b)}{\Delta \cdot \overline{GM}_t} = \frac{1,025 \cdot 700 \cdot (0,293 + 12)}{30000 \cdot 1,531} \rightarrow \text{tg} \theta = 0,192 \rightarrow \theta = 10,87^\circ$$

probablemente demasiado alto para considerarlo estabilidad inicial.

Si consideramos costados verticales

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Y_B'}{\overline{BM}'_t \left(1 + \frac{t^2 \theta}{2}\right) - (\overline{KG} + \overline{KB}')} = Y_B'$$

• Coordenada transversal del c. d. c. Y_B'



Aplicando la componente transversal del momento de transferencia de las empujadas (el buque inicialmente está adrizado)

$$\Delta \cdot Y_B' = \gamma \rho V (y_{b'} - y_b) = \gamma \rho V (y_{F'} - y_b) \rightarrow$$

$$Y_B' = \frac{\gamma \rho V (y_{F'} - y_b)}{\Delta} = \frac{1,025 \cdot 700 \cdot (0,293 + 12)}{30\,000} \rightarrow Y_B' = 0,294 \text{ m}$$

Y por otro lado $\overline{KB}' = \overline{KB} + d \cdot \overline{KB} = 5,25 + 0,115 \rightarrow \overline{KB}' = 5,371 \text{ m}$

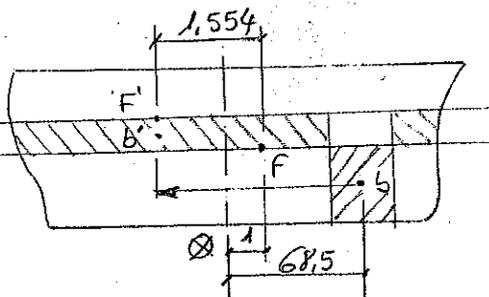
Sustituyendo

$$\operatorname{tg} \theta \left[\overline{BM}'_t \left(1 + \frac{t^2 \theta}{2}\right) - \overline{KG} + \overline{KB}' \right] = Y_B' \rightarrow \operatorname{tg} \theta \left[5,560 \left(1 + \frac{t^2 \theta}{2}\right) - 9,4 + 5,371 \right] = 0,294$$

Resolviendo esta ecuación por aproximaciones sucesivas \rightarrow

$$\operatorname{tg} \theta = 0,181 \rightarrow \theta = 10,272^\circ = 10^\circ 16' 17''$$

9) Trimado



Momento de trimado = componente longitudinal del momento de transferencia de las empujadas ($b \rightarrow b'$)

$$M_{tr} = \gamma \rho V (\overline{\phi b}' - \overline{\phi b}) = \gamma \rho V (\overline{\phi F}' - \overline{\phi b})$$

y además $M_{tr} = \Delta \cdot \overline{GM}_e + \operatorname{tg} \varphi \rightarrow$

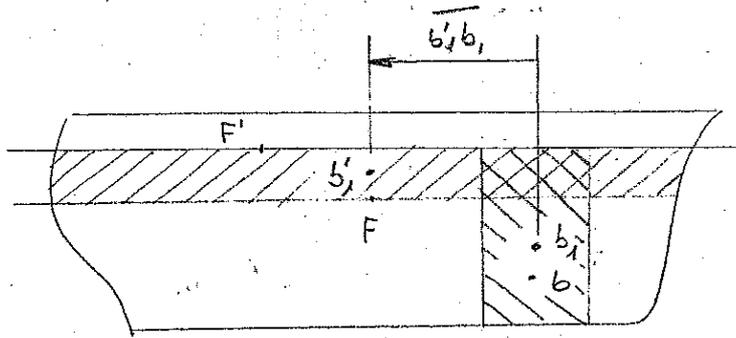
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma \rho V (\overline{\phi F}' - \overline{\phi b})}{\Delta \cdot \overline{GM}_e} \rightarrow \text{trabajando con valores absolutos}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1,025 \cdot 700 \cdot (68,5 - 1 + 1,554)}{30\,000 \cdot 144,088} \rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0,011 \rightarrow \varphi = 0,657^\circ = 0^\circ 39' 24''$$

Y el cambio de trimado debido a la inundación

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{t}{L_{pp}} \rightarrow t = L_{pp} \cdot \operatorname{tg} \varphi = 220 \cdot 0,011 \rightarrow t = 2,522 \text{ m entre perpendiculares}$$

El momento de trimado también lo podríamos haber obtenido a partir del volumen completo inundado y de la flotación entera ($b_1 \rightarrow b'_1$)



$$M_{tr} = \gamma \rho V (\bar{b}'_1 - \bar{b}_1) = \gamma \rho V (\bar{\Phi} F - \bar{\Phi} G)$$

Únicamente que no conocemos \bar{b}_1 , aunque no se comete mucho error al suponer $\bar{b}_1 \approx \bar{b}$

Otra aproximación muy común es aproximar $GM_1 \approx BM_2$